Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. Georg Schnitger
Dipl. Inf. Bert Besser

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungsblatt 2

Ausgabe: 28.10.2013
Abgabe : 04.11.2013 **vor** Vorlesungsbeginn

Wir betrachten das gewichtete MATCHING-Problem für ungerichtete Graphen mit nicht negativen Kantengewichten. Eine Kantenteilmenge heißt ein Matching, falls es keine zwei Kanten mit einem gemeinsamen Endpunkt gibt. Ein schwerstes Matching ist zu bestimmen.

2.1. Aufgabe (2+3+3) — 2-*Matroide*

a) Gib einen einfachen, schnellen und 2-approximativen Algorithmus für MATCHING an und begründe seine Korrektheit.

b) Wir betrachten nun gewichtete, gerichtete Graphen $G = (V, E)$. Das Teilmengensystem $\mathcal{P}$ besteht aus allen Teilmengen der Kanten, so dass kein Zielknoten einer Kante zweimal getroffen wird. Zeige, dass $(\mathcal{P}, E)$ ein Matroid ist.

c) Betrachte das MATCHING Problem für *bipartite* Graphen $G = (V_1, V_2, E)$ als Mengensystem. Die Grundmenge ist die Menge aller Kanten, das Teilmengensystem $\mathcal{M}$ besteht aus allen Matchings. Zeige, dass $(\mathcal{M}, E)$ als Durchschnitt zweier Matroide darstellbar ist.

2.2. Aufgabe (8) — *Matching mit Knotengewichten*

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Betrachte das Teilmengensystem $(\mathcal{P}, V)$, in dem jedes $Y \in \mathcal{P}$ eine Teilmenge der Endpunkte eines Matchings ist. Zeige dass $(\mathcal{P}, V)$ ein Matroid ist. Dabei kann die Ergänzungseigenschaft helfen.

Also können wir das Matching-Problem mit gewichteten Knoten (statt Kanten) "greedy lösen".

2.3. Aufgabe (8) — *Graphische Matroide*

M_G sei die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix des ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, es gelte also $M_G[v, e] = 1$ genau dann wenn $v \in e$. Jede Kante entspricht also einem Spaltenvektor von M_G.

Zeige, dass $F \subseteq E$ genau dann ein Wald ist, wenn die den Kanten aus F entsprechenden Spaltenvektoren linear unabhängig sind, wobei der Körper $\mathbb{Z}_2$ zugrunde gelegt wird.

Somit lässt sich jedes graphische Matroid als ein Matrix-Matroid auffassen.