Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 1

Ausgabe: 24.04.2017
Abgabe: 02.05.2017, 9:45

Um die Aufgaben bearbeiten zu können, benötigen Sie Grundkenntnisse der Stochastik wie Sie sie in Kapitel 2.4 im Skript finden.
Hinweis: Die Ungleichung $e^{-x/(1-x)} \leq 1 - x \leq e^{-x}$ für alle $x < 1$ (Lemma 2.21) kann hilfreich sein.

Aufgabe 1.1 *PAC-Algorithmen, Konzept- und Hypothesenklassen* (8 Punkte)

Sei X ein endlicher Beispielraum, $\mathcal{C}$ eine Konzeptklasse und $\mathcal{H}$ eine Hypothesenklasse über X.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

> Wenn es einen PAC-Algorithmus gibt, der Konzepte aus $\mathcal{C}$ mit Hypothesen aus $\mathcal{H}$ lernt, dann ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$.

Aufgabe 1.2 *Der Kleinste-Intervall-Algorithmus* (16 Punkte)

Im Folgenden seien $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ der Fehlerparameter und δ der Misstrauensparameter.

a) Der Kleinste-Intervall-Algorithmus lernt beliebige Zielkonzepte $c = [l_c, r_c] \subseteq [0, 1]$. Zunächst werden unabhängig voneinander Beispiele $x_1, \ldots, x_s$ aus $X := [0, 1]$ gezogen. Das kleinste Intervall h_c, das alle positiven Beispiele enthält, wird ausgegeben.

   Sei D die Gleichverteilung auf X.

   (i) Zeigen Sie, dass $s \geq \frac{2\ln(2/\delta)}{\varepsilon}$ Beispiele ausreichen, um mit „großer" Wahrscheinlichkeit nur „kleine" Fehler zu machen, d.h. zeigen Sie die folgende Ungleichung:

   $$\mathrm{prob}_D\left[\mathrm{fehler_D}(c, h_c) \geq \varepsilon\right] \leq \delta.$$

   Hinweis: Wieso ist für den Fall $\mathrm{prob}_D[c] \leq \varepsilon$ nichts zu zeigen? Nehmen Sie also o.B.d.A. $\mathrm{prob}_D[c] > \varepsilon$ an. Seien $c^{(l)} := [l_c, l_c + \frac{\varepsilon}{2}]$ und $c^{(r)} := [r_c - \frac{\varepsilon}{2}, r_c]$ zwei Teilintervalle (am linken bzw. rechten Rand) von c. Bestimmen Sie eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{prob}_D\left[h_c \cap c^{(l)} = \emptyset \text{ oder } h_c \cap c^{(r)} = \emptyset\right]$.

   (ii) Betrachten Sie nun den Fall $c = [0, 1]$. Zeigen Sie, dass der Algorithmus bei $s < \frac{\ln\frac{1}{\delta}}{2\varepsilon}$ Beispielen mit „großer" Wahrscheinlichkeit einen „großen" Fehler macht, d.h. zeigen Sie

   $$\mathrm{prob}_D\left[\mathrm{fehler_D}(c, h_c) \geq \varepsilon\right] > \delta.$$

   Hinweis: Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt keines der Beispiele $x_1, \ldots, x_s$ im Teilintervall $[0, \varepsilon]$?

b) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und sei $\mathcal{C} = \mathcal{H} = \left\{\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\} : r > 0\right\}$ die Menge aller Kreisscheiben mit Mittelpunkt $(0, 0)$.

   Entwerfen Sie einen PAC-Algorithmus A für $\mathcal{C}$. Wie viele Beispiele $s = s(\varepsilon, \delta)$ reichen aus?

Aufgabe 1.3 *PAC-Lernen mit einseitig verrauschten Beispielen* (8 Punkte)

Wie in Aufgabe 1.2 betrachten wir wieder den Kleinste-Intervall-Algorithmus auf $X = [0, 1]$, aber diesmal mit einer beliebigen Verteilung D, wobei der Algorithmus das kleinste Intervall, das alle positiv *klassifizierten* Beispiele enthält, ausgibt. Sei $\mathcal{C} = \mathcal{H} = \{[l, r] : 0 \leq l < r \leq 1\}$ die Menge aller Teilintervalle von $[0, 1]$ und sei $c = [l_c, r_c] \in \mathcal{C}$ ein beliebiges Zielkonzept.

Der Algorithmus erhält nun gemäß der Verteilung D unabhängig voneinander gezogene Beispiele $x_1, \ldots, x_s \in X$. Alle negativen Beispiele sind korrekt klassifiziert, aber die positiven Beispiele werden mit der Wahrscheinlichkeit $0 < \eta < 1$ ebenfalls negativ klassifiziert, d.h. ist $x_i \in c$, dann wird x_i mit der Wahrscheinlichkeit η fälschlicherweise als „nicht in c“ klassifiziert.

Zeigen Sie, dass der Kleinste-Intervall-Algorithmus auch mit einseitig verrauschten Beispielen ein PAC-Algorithmus ist.

Gehen Sie wie folgt vor: Analog zu Aufgabe 1.2 a) ist für den Fall $\mathrm{prob}_D\left[c\right] \leq \varepsilon$ nichts zu zeigen. Nehmen Sie also o.B.d.A. $\mathrm{prob}_D\left[c\right] > \varepsilon$ an. Seien $c^{(l)} := [l_c, l']$ und $c^{(r)} := [r', r_c]$ zwei Teilintervalle (am linken bzw. rechten Rand) von c mit $\mathrm{prob}_D\left[c^{(l)} \cup c^{(r)}\right] \geq \varepsilon$.

a) Geben Sie eine obere Schranke für $\mathrm{prob}_D\left[h_c \cap \left(c^{(l))} \cup c^{(r)}\right) = \emptyset\right]$ in Abhängigkeit von s, η und ε an.

   Hinweis: Sie können die Chernoff-Ungleichung (Satz 2.36) verwenden. Es gibt aber auch eine direkte Argumentation, die ohne die Chernoff-Ungleichung auskommt und sogar für Teilaufgabe b) eine etwas bessere Schranke liefert.

b) Verwenden Sie diese Schranke, um wiederum eine obere Schranke für $\mathrm{prob}_D\left[\mathrm{fehler}_\mathrm{D}(c, h_c) > \varepsilon\right]$ in Abhängigkeit von s, η und ε anzugeben.

   Wie viele Beispiele $s = s(\varepsilon, \delta, \eta)$ reichen aus?