Computational Learning Theory

Sommersemester 2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 5

Ausgabe: 22.05.2017
Abgabe: 29.05.2017

Auf diesem Blatt gibt es vier Bonuspunkte zu erreichen.

Aufgabe 5.1 *Das Pebble-Spiel und PAC-Lernen von regulären Sprachen* (8 Punkte)

Sei S ein $\{\wedge, \vee, \neg\}$-Schaltkreis mit genau n Eingabebits $x_1, \ldots, x_n$ sowie genau einem Ausgabebit $S(x_1, \ldots, x_n)$. Der zu S gehörige Graph G_S ist ein gerichteter, azyklischer Graph mit n Quellen und einer Senke. Der Eingrad von G_S ist höchstens 2 und die Tiefe, d.h. die Länge eines längsten Weges in G_S, sei t. Wir sagen, dass S die Eingabe $(x_1, \ldots, x_n)$ genau dann *akzeptiert*, wenn $S(x_1, \ldots, x_n) = 1$ ist.

a) In der Vorlesung wurde das Pebble-Spiel vorgestellt (siehe Folie 152), welches wir nun auf dem Graphen G_S spielen. Ziel des Spiels ist es, einen Pebble auf die Senke zu setzen.

   Zeigen Sie (durch vollständige Induktion): Auf G_S kann das Pebble-Spiel mit höchstens $t + 1$ Pebbles in höchstens $2^{t+1} - 1$ Zügen gewonnen werden.

b) Zeigen Sie:

   Es gibt einen DFA A_S über dem Alphabet $\{0, 1\}$ mit $\mathrm{poly}(2^t)$ Zuständen, sodass für alle $w \in \{0, 1\}^n$ gilt:

$$A_S \text{ akzeptiert } \underbrace{ww \ldots w}_{2^{t+1}-1\text{-mal}} \iff S \text{ akzeptiert } w$$

   Hinweis: Konstruieren Sie einen DFA, der sowohl die möglichen Spielsituationen und Spielzüge des Pebble-Spiels simuliert wie auch parallel dazu den Schaltkreis auswertet. Der DFA soll genau dann akzeptieren, wenn ein Pebble auf die Senke gesetzt wird und der Schaltkreis eine Eins ausgibt. Eine informelle, aber überzeugende Begründung für die Korrektheit Ihres DFAs ist völlig ausreichend.

Fazit: Wenn die RSA-Hypothese gilt, dann sind reguläre Sprachen nicht effizient PAC-lernbar, selbst wenn wir uns auf die vervielfachte Gleichverteilung beschränken.

Aufgabe 5.2 *VC-Dimension, Tiefe und der Halbierungsalgorithmus* (16 Punkte)

Zur Erinnerung: Die folgende Ungleichungskette gilt für jede endliche Konzeptklasse $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{VC}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{Tiefe}(\mathcal{C}) = \mathrm{Gegenbeispiel}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{Gegenbeispiel}_{\mathrm{Halbierung}}(\mathcal{C}) \leq \log_2 |\mathcal{C}|.$$

Die erste Ungleichung gilt sogar für unendliche Konzeptklassen.

a) Sei $r \in \mathbb{N}_{>0}$. Betrachten Sie die Konzeptklasse $\textsc{Monoton-Monom}^1_{2^r}$ aller monotonen Monome der Länge 1 über 2^r Variablen, d.h. der Beispielraum ist die Menge $\{0, 1\}^{2^r}$ aller möglichen Belegungen und für jedes $i \in \{1, \ldots, 2^r\}$ entspricht dem positiven Literal x_i das Konzept $c_i := \{b \in \{0, 1\}^{2^r} : b_i = 1\}$.

   Zeigen Sie: $\mathrm{Gegenbeispiel}(\textsc{Monoton-Monom}^1_{2^r}) = r$.

Bitte wenden!

b) Sei $\textsc{Half-Interval}_n := \big\{\{1,2,\ldots,i\} : i \in \{1,\ldots,n\}\big\}$ die Konzeptklasse der Halbintervalle.

   i) Bestimmen Sie $\mathrm{VC}(\textsc{Half-Interval}_n)$.
   ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Gegenbeispiel}(\textsc{Half-Interval}_n)$.
   iii) Wie gut ist die VC-Dimension als untere Schranke für die Gegenbeispiel-Zahl?

c) Sei $\textsc{Box}_n := \big\{\{1,\ldots,a\} \times \{1,\ldots,b\} : a,b \in \{1,\ldots,n\}\big\}$ die Konzeptklasse aller achsenparallelen Rechtecke auf dem Gitter $\{1,\ldots,n\}^2$. Jedes Konzept besitzt die Ecke $(1,1)$.

   Gibt es einen Online-Lernalgorithmus für $\textsc{Box}_n$, der nach höchstens $\mathcal{O}(\log n)$ Gegenbeispielen das Zielkonzept findet?

d) Gegeben sei die Beispielmenge $X = \{x^{(1)},\ldots,x^{(8)}\}$ und die Konzeptklasse $\mathcal{C} = \{c_1,\ldots,c_9\} \subseteq \textsc{Boolean}_n$ boolescher Funktionen wie in der folgenden Tabelle dargestellt:

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
$x^{(1)}$:	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$x^{(2)}$:	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$x^{(3)}$:	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$x^{(4)}$:	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$x^{(5)}$:	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$x^{(6)}$:	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$x^{(7)}$:	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$x^{(8)}$:	0	0	0	0	0	0	1	0	1

   Dabei steht in Zeile $x^{(i)}$ und Spalte c_j genau dann eine 1, wenn $c_j(x^{(i)}) = 1$ bzw. $x^{(i)} \in c_j$ ist.

   i) Der Halbierungsalgorithmus erhalte zunächst die Beispiele $x^{(6)}, x^{(7)}$ und $x^{(8)}$ (in dieser Reihenfolge). Zeigen Sie $\mathrm{Gegenbeispiel}_{\mathrm{Halbierung}}(\mathcal{C}) \geq 3$.
   ii) Zeigen Sie nun, dass der Halbierungsalgorithmus nicht optimal ist, indem Sie $\mathrm{Tiefe}(\mathcal{C}) = 2$ nachweisen, d.h. zeigen Sie, dass ein Schüler mit dem optimalen Schüleralgorithmus (Algorithmus 7.10 im Skript) für jede Folge vorgelegter Beispiele des Lehrers nach höchstens zwei Gegenbeispielen gewinnt.

Aufgabe 5.3 *Grenzen und Varianten des Online-Spiels* (12 Punkte)

a) Betrachten Sie die Konzeptklasse $\textsc{Real-Half-Interval} := \big\{[0,a] : a \in [0,1]\big\}$ der reellen Halbintervalle in $[0,1]$.

   Zeigen Sie: $\textsc{Real-Half-Interval}$ ist nicht online-lernbar.

b) Die in der Vorlesung vorgestellte Variante des Online-Spiels heiße im Folgenden *Klausurmodell*. Betrachten Sie nun das sogenannte *Hypothesenmodell*:

   1. Das Spiel beginnt in Runde $t = 1$.
   2. Solange der Schüler noch nicht gewonnen hat:
      (a) Der Schüler präsentiert eine Hypothese h_t. (Er ist an keine Hypothesenklasse gebunden!)
      (b) Wenn die Hypothese falsch ist, gibt der Lehrer ein Gegenbeispiel x_t bekannt und setzt $t := t+1$,
      andernfalls hat der Schüler gewonnen.

   Sei $\mathrm{Gegenbeispiel}^{\mathrm{K}}(\mathcal{C})$ bzw. $\mathrm{Gegenbeispiel}^{\mathrm{H}}(\mathcal{C})$ die Anzahl der Gegenbeispiele im Klausur- bzw. Hypothesenmodell.

   Zeigen Sie: $\mathrm{Gegenbeispiel}^{\mathrm{K}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Gegenbeispiel}^{\mathrm{H}}(\mathcal{C})$.

   Hinweis: Wenden Sie für beide Ungleichungen („$\leq$“, „$\geq$“) den optimalen Schüleralgorithmus 7.10 an.