

Sommersemester 2018

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

Übungsblatt 1

Ausgabe: 16.04.2018
Abgabe: 23.04.2018, 12:15

Bitte beachten Sie:

- Alle Antworten sind zu begründen, außer der Aufgabentext erlaubt, dass eine Begründung entfallen darf.
- Um die Aufgaben zu bearbeiten, benötigen Sie Grundkenntnisse der Kombinatorik und Stochastik wie Sie sie in den Kapiteln 2.3 und 2.4 im Skript finden.

Hinweis: Die Mutter aller Ungleichungen „ $e^{-x/(1-x)} \leq 1 - x \leq e^{-x}$ für alle $x < 1$ “ (Lemma 2.21) hilft Ihnen gerne!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.1 PAC-Algorithmen, Konzept- und Hypothesenklassen (7 Punkte)

Sei X ein endlicher Beispielraum, \mathcal{C} eine Konzeptklasse und \mathcal{H} eine Hypothesenklasse über X .

Zeigen Sie:

Wenn es einen PAC-Algorithmus gibt, der Konzepte aus \mathcal{C} mit Hypothesen aus \mathcal{H} lernt, dann ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$.

Hinweis: Wann ist ein Algorithmus *kein* PAC-Algorithmus?

Aufgabe 1.2 Endliche Konzeptklassen (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

- a) Die Konzeptklasse $k\text{-KNF}_n$ besitzt für jede aussagenlogische Formel α in konjunktiver Normalform (mit höchstens k Literalen aus $\{x_1, \neg x_1, \dots, x_n, \neg x_n\}$ pro Klausel) das Konzept

$$\text{Wahr}(\alpha) = \{b \in \{0, 1\}^n : b \text{ erfüllt } \alpha\}.$$

Beschreiben Sie einen PAC-Algorithmus für die Konzeptklasse $k\text{-KNF}_n$ mit der Hypothesenklasse $k\text{-KNF}_n$. Wie viele klassifizierte Beispiele $s = s(\varepsilon, \delta, k, n)$ reichen aus?

- b) Die Konzeptklasse $\text{DFA}_{n,\Sigma}$ besitzt für jeden DFA mit der Zustandsmenge $\{1, \dots, n\}$ über dem Alphabet Σ das Konzept

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* : A \text{ akzeptiert } w\}.$$

Beschreiben Sie einen PAC-Algorithmus für die Konzeptklasse $\text{DFA}_{n,\Sigma}$ mit der Hypothesenklasse $\text{DFA}_{n,\Sigma}$. Wie viele klassifizierte Beispiele $s = s(\varepsilon, \delta, n, |\Sigma|)$ reichen aus?

- c) Analog zu b) sei die Konzeptklasse $\text{NFA}_{n,\Sigma}$ für NFAs definiert.

Beschreiben Sie einen PAC-Algorithmus für die Konzeptklasse $\text{NFA}_{n,\Sigma}$ mit der Hypothesenklasse $\text{NFA}_{n,\Sigma}$. Wie viele klassifizierte Beispiele $s = s(\varepsilon, \delta, n, |\Sigma|)$ reichen aus?

Begründen Sie Ihre Rechnungen jeweils ausführlich. Ihre PAC-Algorithmen müssen nicht unbedingt effizient sein.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.3 *Der Kleinste-Intervall-Algorithmus* $((5 + 5) + 6 = 16$ Punkte)

Im Folgenden seien $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ der Fehlerparameter und δ der Misstrauensparameter.

- a) Der *Kleinste-Intervall-Algorithmus* lernt Zielkonzepte $c = [l_c, r_c] \subseteq [0, 1]$. Zunächst werden unabhängig voneinander Beispiele x_1, \dots, x_s aus $X := [0, 1]$ gezogen. Das kleinste Intervall h_c , das alle positiven Beispiele enthält, wird ausgegeben.

Sei D die Gleichverteilung auf X und

$$\mathcal{C} = \mathcal{H} = \{[l_c, r_c] : 0 \leq l_c \leq r_c \leq 1\}$$

die überabzählbare Konzeptklasse aller Teilintervalle in $[0, 1]$.

- (i) Zeigen Sie, dass $s \geq \frac{2 \ln(2/\delta)}{\varepsilon}$ Beispiele ausreichen, damit „große“ Fehler nur mit „kleiner“ Wahrscheinlichkeit auftreten, d. h. zeigen Sie

$$\text{prob}_D [\text{fehler}_D(c, h_c) \geq \varepsilon] \leq \delta.$$

Hinweis: Wieso ist für den Fall $\text{prob}_D [c] \leq \varepsilon$ nichts zu zeigen? Nehmen Sie also o.B.d.A. $\text{prob}_D [c] > \varepsilon$ an. Seien $c^{(l)} := [l_c, l_c + \frac{\varepsilon}{2}]$ und $c^{(r)} := [r_c - \frac{\varepsilon}{2}, r_c]$ zwei Teilintervalle (am linken bzw. rechten Rand) von c . Bestimmen Sie eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $\text{prob}_D [h_c \cap c^{(l)} = \emptyset \text{ oder } h_c \cap c^{(r)} = \emptyset]$.

- (ii) Betrachten Sie nun den Fall $c = [0, 1]$. Zeigen Sie, dass der Algorithmus bei $s < \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{2\varepsilon}$ Beispielen mit „großer“ Wahrscheinlichkeit einen „großen“ Fehler macht, d. h. zeigen Sie

$$\text{prob}_D [\text{fehler}_D(c, h_c) \geq \varepsilon] > \delta.$$

Hinweis: Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt keines der Beispiele x_1, \dots, x_s im Teilintervall $[0, \varepsilon]$?

- b) Sei D die Gleichverteilung auf dem Einheitsquadrat $X = [0, 1]^2$ und

$$\mathcal{C} = \mathcal{H} = \{[0, a] \times [0, b] : 0 < a \leq 1, 0 < b \leq 1\}$$

die Konzeptklasse aller Rechtecke mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) und $(0, b)$.

Entwerfen Sie einen Lernalgorithmus für \mathcal{C} mit dem Fehlerparameter ε und dem Misstrauensparameter δ . Wie viele Beispiele $s = s(\varepsilon, \delta)$ reichen aus?