Computational Learning Theory

Wintersemester 2011/2012

Prof. Dr. Georg Schnitger

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Blatt 2

Ausgabe: 31.10.2011
Abgabe: 07.11.2011

2.1. Aufgabe (8) *Occam-Algorithmen*

Wir benötigen die folgende Binärkodierung natürlicher Zahlen: Für $x \in \mathbb{N}$ mit $x = \sum_{i=0}^{k} x_i 2^i$ (und $x_k = 1$) und $k = \sum_{i=0}^{r} k_i 2^i$ (mit $k_r = 1$) setze

$$\text{code}(x) = k_0\ k_0\ k_1\ k_1 \ldots k_r\ k_r\ 0\ 1\ x_0\ x_1 \ldots x_k$$

Da die Zahl 0 durch die obige Darstellung nicht kodierbar ist, wird anstelle von $x \in \mathbb{N}$ die Zahl $x + 1$ kodiert. Diese Kodierung erlaubt es, Folgen$(x_1, \ldots, x_t)$ von natürlichen Zahlen effizient zu kodieren, nämlich durch das Wort $\text{code}(x_1) \cdots \text{code}(x_t)$. Eine Dekodierung ist stets möglich: Suche die erste Bitfolge $b_{2i-1}b_{2i} = 01$ und bestimme die Anzahl der Bits der ersten Zahl. Damit erhalten wir x_1. Wir wiederholen dieses Verfahren für die folgenden Zahlen.

Ein Intervall $I = [a, b]$ über $\mathbb{N}_0$ besteht aus allen $x \in \mathbb{N}$ mit $a \leq x \leq b$. Wir nehmen stets an, daß die Endpunkte a und b natürliche Zahlen sind. Wir betrachten die Konzeptklasse INTERVALL, die für jede endliche Vereinigung $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_s$ von Intervallen über $\mathbb{N}$ ein Konzept $c_{I_1,\ldots,I_s}$ besitzt. Das Konzept $c_{I_1,\ldots,I_s}$ besteht aus allen natürlichen Zahlen, die zu der Vereinigung $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_s$ gehören. Ein Beispiel: Für $I_1 = [2, 5]$ und $I_2 = [9, 9]$ ist $c_{I_1,I_2} = \{2, 3, 4, 5, 9\}$.

Sei $I_j = [a_j, b_j]$ für $j = 1, \ldots, s$. Die obige Binärkodierung von $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_s, b_s)$ dient als Name für das Konzept $c_{I_1,\ldots,I_s}$. Das leere Konzept erhält den Namen $\text{code}(1) \cdot \text{code}(0)$, also den Namen des leeren Intervalls $[1, 0]$. Entwirf einen effizienten Occam-Algorithmus für INTERVALL, der eine konsistente Hypothese mit kürzestem Namen konstruiert.

2.2. Aufgabe (8) *VC-Dimension*

a) Die Konzeptklasse KREIS_2 besitzt für jeden Kreis K in $\mathbb{R}^2$ ein Konzept. Für den Kreis mit Mittelpunkt x und Radius r besteht das entsprechende Konzept aus allen Punkten $y \in \mathbb{R}^2$ mit $||x - y|| \leq r$. Zeige: $\text{VC}(\text{KREIS}_2) = 3$.

b) Bestimme die VC-Dimension für die Konzeptklasse KREIS_3 der 3-dimensionalen Kugeln und begründe Deine Antwort.

2.3. Aufgabe (8) *VC-Dimension*

Wir betrachten das Spiel Schiffeversenken. Gespielt wird auf einem Spielfeld mit 10 mal 10 Zellen. Ein Spieler hat vier Schiffe, der Größe 1×4, 1×3, 1×2 und 1×1. Er darf die Schiffe auf den Zellen beliebig waagerecht oder senkrecht (nicht diagonal) positionieren, wobei sich die Schiffe in keiner Weise berühren dürfen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3			X	X	X	X				X
4										X
5										X
6										
7							X	X		
8				X						
9										
10										

Das Konzept $c = \{C3, D3, E3, F3, J3, J4, J5, G7, H7, D8\}$

Ein Konzept sei eine mit den Regeln vereinbare Anordnung der vier Schiffe. Wir können also das Konzept durch die Menge der von den Schiffen abgedeckten Zellen repräsentieren. Die Gesamtheit aller legalen Anordnungen ist eine Konzeptklasse.

Gib eine möglichst gute untere Schranke für die VC-Dimension dieser Konzeptklasse an.