

Blatt 5

Ausgabe: 21.11.2011

Abgabe: 28.11.2011

Hinweis: Die maximal erreichbare Punktzahl für dieses Blatt ist 24. Alle darüber hinaus erreichten Punkte werden zur Gesamtpunktzahl aller Blätter addiert.

5.1. Aufgabe (12)

Pebbles

Sei G ein gerichteter azyklischer Graph mit Fan-in 2 und genau einer Senke. $\text{Tiefe}(G)$ bezeichnet die Länge eines längsten Pfades in G . Die Länge eines Pfades ist hierbei als die Anzahl seiner Kanten definiert.

Zeige: G kann mit höchstens $\text{Tiefe}(G) + 1$ Pebbles in Zeit höchstens $2^{\text{Tiefe}(G)+1} - 1$ gepebbelt werden. Nimm dabei an, dass das Setzen eines Steins auf einen Knoten mit bereits gepebbelten Vorgängern im selben Zug alle Steine von den Vorgängern löscht.

5.2. Aufgabe (12)

FORMEL_n

- Zeige: Für jeden Schaltkreis S mit Tiefe t , Fan-in 2 und einer Senke, der nur aus \wedge, \vee, \neg -Gattern besteht, gibt es eine Formel α_S mit Formellänge höchstens $2^{t+1} - 1$, so dass S und α_S dieselben Eingaben akzeptieren.
- FORMEL_n sei die Konzeptklasse der booleschen Formeln über n Variablen mit höchstens n Operatoren aus $\{\wedge, \vee, \neg\}$ (siehe Skript). Zeige, dass die parametrisierte Konzeptklasse $\text{FORMEL} = (\text{FORMEL}_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ keine effizienten PAC-Algorithmen besitzt, falls die Klasse der Schaltkreise logarithmischer Tiefe keinen effizienten PAC-Algorithmus besitzt.

5.3. Aufgabe (12)

VC-Dimension

Die Konzeptklasse $\text{AUTOMAT}_{n,\Sigma}$ besitzt für jeden deterministischen endlichen Automaten A mit höchstens n Zuständen und dem Eingabealphabet Σ die Menge $L(A) \cap \Sigma^{\leq n}$ als Konzept. Im folgenden gehen wir davon aus, dass $\Sigma = \{0, 1\}$. Zeige folgende Aussagen:

- $|\text{AUTOMAT}_{n,\Sigma}| \leq n^{2n} \cdot 2^n$ und
- $\text{VC}(\text{AUTOMAT}_{n,\Sigma}) = \Theta(n \log n)$.

Hinweis: Um zu zeigen, dass die VC-Dimension hinreichend groß ist, setze $S = \{x0^i 10^{\frac{\log n}{4} - i - 1} |x| = \log n - 2, 1 \leq i < \frac{\log n}{4}\}$ und zeige, dass sich die Menge S von $\text{AUTOMAT}_{n,\Sigma}$ zertrümmern lässt.