Computational Learning Theory

Wintersemester 2011/2012

Prof. Dr. Georg Schnitger

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Blatt 7

Ausgabe: 05.12.2011
Abgabe: 12.12.2011

7.1. Aufgabe (8) — *Schwierige Konzeptklassen*

Auf einer Inselgruppe $I = \{I_1, \ldots, I_n\}$ leben verschiedene Tierarten. Die Tiere $t_1, \ldots, t_k$ leben auf jeder Insel. Auf der Insel I_x, $1 \leq x \leq n$ lebt außerdem eine nichtleere Menge $\{u_{x,1}, u_{x,2} \ldots\}$ von ganz spezifischen Tieren, die nur auf I_x vorkommen.

Ein gestrandeter Theoretiker beschließt, sich die Zeit bis zur Rettung damit zu vertreiben, eine Insel an ihrer Fauna zu erkennen. Ihm ist bekannt, welche Tiere auf welcher der Inseln vorkommen. Als Konzept der Insel I_x setzt er also $C_x = \{t_1, \ldots, t_k\} \cup \{u_{x,1}, u_{x,2}, \ldots\}$.

Eine der niederen dort ansässigen Gottheiten fungiert als Lehrer, allerdings verlangt sie für jedes Gegenbeispiel die Opferung eines Räucherstäbchens.

a) Wieviele Räucherstäbchen muss der Theoretiker bei sich haben, wenn er als Hypothesenklasse $H = C$ (also die Menge der Inseln) verwendet?

b) Gib mit Hilfe der VC-Dimension eine untere Schranke für die Gegenbeispielanzahl an.

c) Kann eine Hypothesenklasse angegeben werden, die die Schärfe dieser Schranke belegt?

7.2. Aufgabe (8) — *Online-Algorithmen für totale Ordnungen*

Eine totale Ordnung R auf n Elementen soll gelernt werden. Dabei schließen wir Gleichheit zwischen Elementen aus, d.h. es gilt stets $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \notin R$. Eine totale Ordnung repräsentieren wir durch die Menge aller geordneten Paare. Ein Beispiel ist also ein geordnetes Paar zusammen mit der Information, ob dieses Paar zur zu lernenden totalen Ordnung gehört oder nicht.

a) Bestimme die VC-Dimension dieser Konzeptklasse.

b) Zeige, dass jeder Lernalgorithmus mindestens $\Omega(n \cdot \log(n))$ Gegenbeispiele anfordern wird, wenn vollständige Ordnungen auf n Elementen zu lernen sind.

Bemerkung: Es zeigt sich, dass die untere Schranke #Gegenbeispiel$(C) \geq VC(C)$ nicht scharf ist.

7.3. Aufgabe (8) — *Margin der UND-Funktion*

Zeige $Margin(\{0, 1\}^n, UND) = \Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$ für die boolesche Funktion $UND(x) = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$.