Computational Learning Theory

Wintersemester 2011/2012

Prof. Dr. Georg Schnitger

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Blatt 8

Ausgabe: 12.11.2011
Abgabe: 19.12.2011

8.1. Aufgabe (8) — *Perzeptron auf ganzen Zahlen*

Die Threshold-Funktion $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + t \geq 0$ berechne eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{-1,1\}$. Die Gewichte $w_1, \ldots, w_n$ wie auch der Schwellenwert t seien ganzzahlig und es gelte $|w_1|, .., |w_n| \leq W$. Zeige:

a) Für alle $x \in \{0,1\}^n$ gilt: $\langle w, x\rangle + t \geq 0 \Leftrightarrow \langle w, x\rangle + (t + \frac{1}{2}) \geq 0$.

b) Nach Teil a) berechnet $\langle w, x\rangle + (t + \frac{1}{2}) \geq 0$ ebenfalls die Funktion f. Zeige $Margin(S, f) = \Omega(\frac{1}{\sqrt{n}W})$.

c) Der Perzeptron-Algorithmus benötigt höchstens $O(n^2W^2)$ viele Gegenbeispiele.

Hinweis: Siehe Satz 3.23 im Skript.

8.2. Aufgabe (8) — *Laufzeit des Perzeptron-Algorithmus*

Wir lernen mit dem Perzeptron-Algorithmus die Funktion $COMP_n$ zum Vergleich von Binärzahlen, also

$$COMP_n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{i-1} \geq \sum_{i=1}^{n} y_i 2^{i-1} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass für jede Ausgabe $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i + \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + t \geq 0$ die Eigenschaft $\max_{1 \leq i \leq n} |u_i| = \Omega(2^n)$ gilt, dass es also einen exponentiell großen Koeffizienten geben muss.

Hinweis: Benutze, dass alle Gewichte $u_i, v_i, 1 \leq i \leq n$ ganzzahlig sein müssen.

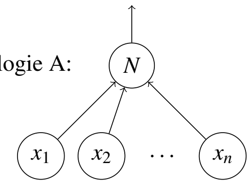
b) Zeige, dass der Perzeptron-Algorithmus $\Omega(2^n)$ Gegenbeispiele benötigt.

8.3. Aufgabe (9) — *Einfache Neuronale Netze*

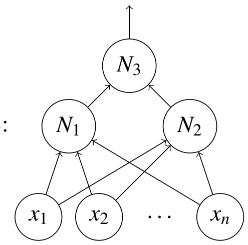
Wir analysieren einfache neuronale Netze, nämlich Netze von Threshold Gattern. Ein Gatter hat eine (variable) Zahl n von Eingängen und genau einen Ausgang. Es wird spezifiziert durch seine Eingangsgewichte $a_1, \ldots, a_n$ und seinen Threshold b. Werden an den Eingängen Werte $x_1, \ldots, x_n$ angelegt, so liefert das Gatter am Ausgang 1, falls $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b$ gilt und -1 sonst.

a) Welche der Funktionen UND_n, ODER_n, MEHRHEIT_n und PARITÄT_n kann mit einem Netz der Topologie A realisiert werden? Warum?

Topologie A:



Topologie B:



b) Gib eine Funktion $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{-1,+1\}$ an, die von einem Netz der Topologie B berechnet wird aber von keinem Netz der Topologie A berechnet werden kann.

c) Zeige, dass das Gatter N_3 in Topologie B stets durch ein logisches binäres Gatter (evtl. mit invertierten Eingängen) ersetzt werden kann, ohne dass sich die berechnete Funktion ändert. Die -1 repräsentiert hier den booleschen Wert `falsch`.