Was ist Logik?

Logik (nach dem Altgriechischen „Logos“: „Vernunft“) ist

die Lehre des vernünftigen Schlussfolgerns.

Die für die Logik zentrale Frage:

> *Wie kann man Aussagen miteinander verknüpfen, und auf welche Weise kann man formal Schlüsse ziehen und Beweise führen?*

Logik in der Informatik

Logik wird in der Informatik u.a. genutzt

- für die **Beschreibung, Analyse, Optimierung** und **Verifikation** digitaler Schaltungen,
- für den **Nachweis**, dass ein Programm gewisse wünschenswerte Eigenschaften hat,
- für die **Wissensrepräsentation**, z.B. im Bereich der künstlichen Intelligenz,
- als Grundlage für **Datenbank-Anfragesprachen**,
- für die **automatische Erzeugung von Beweisen** in so genannten „Theorembeweisern“.

Aussagenlogik

- **Aussagen** im Sinne der Aussagenlogik sind sprachliche Gebilde, die entweder **wahr** oder **falsch** sind.

  *Aussagen können mit **Junktoren** wie „nicht“, „und“, „oder“, „wenn . . . dann“ etc. zu komplexeren Aussagen verknüpft werden.*

- Die **Aussagenlogik** beschäftigt sich

  mit allgemeinen Prinzipien des korrekten Argumentierens und Schließens mit Aussagen und Kombinationen von Aussagen.

Das Einstein-Rätsel: Wem gehört der Fisch?

1. Der Brite lebt im roten Haus.
2. Die Schwedin hält sich einen Hund.
3. Der Däne trinkt gern Tee.
4. Das grüne Haus steht (direkt) links neben dem weißen Haus.
5. Die Person, die im grünen Haus wohnt, trinkt Kaffee.
6. Die Person, die Pall Mall raucht, hat einen Vogel.
7. Die Person, die im mittleren Haus wohnt, trinkt Milch.
8. Die Person, die im gelben Haus wohnt, raucht Dunhill.
9. Die Norwegerin lebt im ersten Haus.
10. Die Person, die Marlboro raucht, wohnt neben der Person mit der Katze.
11. Die Person mit dem Pferd lebt neben der Person, die Dunhill raucht.
12. Die Person, die Winfield raucht, trinkt gern Bier.
13. Die Norwegerin wohnt neben dem blauen Haus.
14. Der Deutsche raucht Rothmanns.
15. Die Person, die Marlboro raucht, lebt neben der Person, die Wasser trinkt.

Geburtstagsfeier (1/3)

Fred möchte seinen Geburtstag mit möglichst vielen seiner Freunde,

nämlich mit Anne, Bernd, Christine, Dirk und Eva

feiern.

- Er weiß, dass Eva nur dann kommt, wenn Christine und Dirk kommen.
- Andererseits kommt Christine nur dann, wenn auch Anne kommt;
- und Dirk wird auf keinen Fall kommen,
  wenn Bernd und Eva beide zur Feier kommen.
- Anne wiederum wird nur dann kommen,
  wenn auch Bernd oder Christine dabei sind.
- Wenn allerdings Bernd und Anne beide zur Party kommen,
  dann wird Eva auf keinen Fall dabei sein.

Wie viele Freunde, und welche, werden im besten Fall zur Party kommen?

Geburtstagsfeier (2/3)

Das Wissen, das im obigen Text wiedergegeben ist, lässt sich in „atomare Aussagen“ zerlegen, die mit Junktoren verknüpft werden können.

Um welche “atomaren Aussagen“ dreht sich der Text?

$$
\begin{array}{lcl}
A & \widehat{=} & \text{Anne kommt zur Feier} \\
B & \widehat{=} & \text{Bernd kommt zur Feier} \\
C & \widehat{=} & \text{Christine kommt zur Feier} \\
D & \widehat{=} & \text{Dirk kommt zur Feier} \\
E & \widehat{=} & \text{Eva kommt zur Feier.}
\end{array}
$$

Das im Text zusammengefasste „Wissen“ lässt sich wie folgt repräsentieren:

1. Eva kommt nur dann, wenn Christine und Dirk kommen.
   - (Wenn E, dann (C und D))
2. Christine kommt nur dann, wenn auch Anne kommt,
   - und (wenn C, dann A)
3. Dirk wird auf keinen Fall kommen, wenn Bernd und Eva beide kommen,
   - und (wenn (B und E), dann nicht D))
4. Anne kommt nur dann, wenn auch Bernd oder Christine dabei sind,
   - und (wenn A, dann (B oder C))
5. wenn Bernd und Anne beide kommen, dann wird Eva auf keinen Fall dabei sein.
   - und (wenn (B und A), dann nicht E)

Die Aussagenlogik liefert einen Formalismus, mit dessen Hilfe man solches „Wissen“ modellieren und Schlüsse daraus ziehen kann.

Syntax und Semantik

Syntax und Semantik: Formeln und ihre Bedeutung

- Die **Syntax** legt fest, welche Zeichenketten Formeln der Aussagenlogik sind.
- Die **Semantik** legt fest, welche „Bedeutung“ die einzelnen Formeln haben.

Für Programmiersprachen ist die Situation ähnlich:

- Die Syntax legt fest, welche Zeichenketten korrekte Programme sind,
- während die Semantik bestimmt, was das Programm tut.

Die Syntax der Aussagenlogik

Griechische Buchstaben

In der Literatur werden Formeln einer Logik traditionell meistens mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

Buchstabe	ϕ	ψ	χ	θ *bzw.* ϑ	λ	μ	ν	τ
Aussprache	*phi*	*psi*	*chi*	*theta*	*lambda*	*mü*	*nü*	*tau*

Buchstabe	κ	σ	ρ	ξ	ζ	α	β	γ
Aussprache	*kappa*	*sigma*	*rho*	*xi*	*zeta*	*alpha*	*beta*	*gamma*

Buchstabe	δ	ω	ε	ι	π	Δ	Γ
Aussprache	*delta*	*omega*	*epsilon*	*iota*	*pi*	*Delta*	*Gamma*

Buchstabe	Σ	Π	Φ
Aussprache	*Sigma*	*Pi*	*Phi*

Aussagenvariablen

(a) Eine **Aussagenvariable** (kurz: Variable) hat die Form V_i für $i \in \mathbb{N}$.
Die Menge aller Aussagenvariablen bezeichnen wir mit AVAR. D.h.:

$$\text{AVAR} \ := \ \{V_i \ : \ i \in \mathbb{N}\} \ = \ \{V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots\}.$$

(b) Das **Alphabet** A_{AL} der Aussagenlogik ist

$$A_{\text{AL}} \quad := \quad \text{AVAR} \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus, (,)\}.$$

Und was sind aussagenlogische Formeln?

Aussagenlogische Formeln

Die Menge AL der aussagenlogischen Formeln (kurz: Formeln) ist die folgendermaßen **rekursiv definierte** Teilmenge von A_{AL}^{*}:

Basisregeln:

(B0) $\mathbf{0} \in \mathsf{AL}$.

(B1) $\mathbf{1} \in \mathsf{AL}$.

(BV) Für jede Variable $X \in \mathsf{AVAR}$ gilt: $X \in \mathsf{AL}$.

Rekursive Regeln:

(R1) Ist $\phi \in \mathsf{AL}$, so ist auch $\neg\phi \in \mathsf{AL}$.

(R2) Ist $\phi \in \mathsf{AL}$ und $\psi \in \mathsf{AL}$, so ist auch

- $(\phi \wedge \psi) \in \mathsf{AL}$
- $(\phi \vee \psi) \in \mathsf{AL}$
- $(\phi \to \psi) \in \mathsf{AL}$
- $(\phi \leftrightarrow \psi) \in \mathsf{AL}$
- $(\phi \oplus \psi) \in \mathsf{AL}$

Eine Formel ϕ gehört genau dann zu AL, wenn man ϕ durch (möglicherweise mehrfache) Anwendung der obigen Regeln erzeugen kann.

Beispiele

- $(\neg V_0 \vee (V_5 \to V_1))$ ist eine korrekt gebildete Formel.
- $V_1 \vee V_2 \vee V_3$ ist keine korrekt gebildete Formel, da die Klammern fehlen,
  - In diesem Fall bleibt die Bedeutung aber klar (warum?).
- $\neg((V_0 \wedge \mathbf{0}) \leftrightarrow \neg V_3)$ ist hingegen wieder eine korrekte Formel,
- $(\neg V_1)$ ist keine korrekte Formel, da sie zu viele Klammern besitzt.
  - Aber auch in diesem Fall bleibt die Bedeutung klar.
- Aber was soll $V_0 \wedge V_1 \vee V_2$ bedeuten?
  - Möglicherweise $(V_0 \wedge V_1) \vee V_2$
  - oder $V_0 \wedge (V_1 \vee V_2)$?

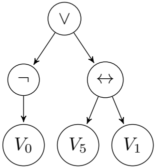
Übrigens, von welcher Bedeutung reden wir überhaupt?

Der Syntaxbaum einer Formel

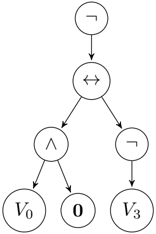
Die Struktur einer Formel lässt sich durch einen **Syntaxbaum** darstellen.

Beispiele:

- Syntaxbaum der Formel $(\neg V_0 \vee (V_5 \leftrightarrow V_1))$:



- Syntaxbaum der Formel $\neg((V_0 \wedge \mathbf{0}) \leftrightarrow \neg V_3)$:



Bezeichnungen

(a) **0** (stets falsch), **1** (stets wahr) und die Variablen (d.h. die Elemente aus AVAR) bezeichnen wir als **atomare Formeln** bzw. **Atome**.

(b) Die Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$ heißen **Junktoren**.

(c) Sind ϕ und ψ Formeln (d.h. $\phi \in$ AL und $\psi \in$ AL), so heißt:

- $\neg\phi$ **Negation** (bzw. Ver*nein*ung) von ϕ,
- $(\phi \wedge \psi)$ **Konjunktion** (bzw. Ver*und*ung) von ϕ und ψ,
- $(\phi \vee \psi)$ **Disjunktion** (bzw. Ver*oder*ung) von ϕ und ψ,
- $(\phi \rightarrow \psi)$ **Implikation** (bzw. Subjunktion) von ϕ und ψ,
- $(\phi \leftrightarrow \psi)$ **Biimplikation** (bzw. Äquivalenz oder Bijunktion) von ϕ und ψ, und
- $(\phi \oplus \psi)$ **Xor** (bzw. exklusives Oder) von ϕ und ψ.

Das Leben ist schon so hart genug!

- Statt $V_0, V_1, V_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ oder mit Variablen wie $X', Y_1, \ldots$
- Die äußeren Klammern einer Formel lassen wir manchmal weg und schreiben z.B. $(A \wedge B) \rightarrow C$ an Stelle des (formal korrekten) $\big((A \wedge B) \rightarrow C\big)$.

Wenn Sie eine Formel „vereinfachen", stellen Sie sicher, dass

die Bedeutung eindeutig ist.

Beispiel für die Formulierung von Formeln (1/2)

Wir möchten die Zeugenaussage

> *„Das Fluchtauto war rot oder grün und*
> *hatte weder vorne noch hinten ein Nummernschild."*

durch eine aussagenlogische Formel repräsentieren. Dazu verwenden wir die folgenden atomaren Aussagen:

- X_R: das Fluchtauto war rot,
- X_G: das Fluchtauto war grün,
- X_V: das Fluchtauto hatte vorne ein Nummernschild,
- X_H: das Fluchtauto hatte hinten ein Nummernschild.

Wir repräsentieren die Zeugenaussage durch

$$\big((X_R \oplus X_G) \wedge (\neg X_V \wedge \neg X_H)\big).$$

Beispiel für die Formulierung von Formeln (2/2)

Wir greifen das Beispiel der Geburtstagsfeier nochmal auf.

Atomare Aussagen:

- A: Anne kommt zur Feier,
- B: Bernd kommt zur Feier,
- C: Christine kommt zur Feier,
- D: Dirk kommt zur Feier,
- E: Eva kommt zur Feier.

Die **vollständige Wissensrepräsentation** wird durch folgende Formel gegeben:

$$\begin{aligned}\phi \quad := \quad & \big(E \to (C \land D)\big) \ \land\ (C \to A) \ \land\ \big((B \land E) \to \neg D\big) \ \land \\ & \big(A \to (B \lor C)\big) \ \land\ \big((B \land A) \to \neg E\big).\end{aligned}$$

Wie viele Personen kommen bestenfalls zur Party?

Die Semantik der Aussagenlogik

Die Variablen einer Formel

Die **Variablenmenge**

$$\mathsf{Var}(\phi)$$

einer aussagenlogischen Formel ϕ ist die Menge aller Variablen $X \in \mathrm{AVAR}$, die in ϕ vorkommen.

- $\mathsf{Var}\Big((\neg V_0 \vee (V_5 \rightarrow V_1))\Big) = \{V_0, V_1, V_5\}$,
- $\mathsf{Var}\Big(\neg((V_0 \wedge \mathbf{0}) \leftrightarrow \neg V_3)\Big) = \{V_0, V_3\}$,
- $\mathsf{Var}\Big((\mathbf{0} \vee \mathbf{1})\Big) = \emptyset$.

Belegungen

(a) Eine **partielle** Funktion

$$\mathcal{B} : \text{AVAR} \to \{0, 1\}$$

von AVAR nach $\{0, 1\}$ heißt eine

Belegung,

bzw. Wahrheitsbelegung.

- 1 steht für den Wert „wahr“ und 0 für den Wert „falsch“.

(b) Eine Belegung $\mathcal{B}$ ist eine Belegung für die Formel ϕ (bzw. **passend** zu ϕ), wenn $\mathcal{B}$ auf allen Variablen von ϕ definiert ist.

Eine Beispiel: Die Funktion $\mathcal{B}$

mit $\mathcal{B}(V_0) = 1, \mathcal{B}(V_1) = 1$ und $\mathcal{B}(V_3) = 0$

besitzt den Definitionsbereich $\{V_0, V_1, V_3\}$. $\mathcal{B}$ ist eine Belegung für

$\big(V_0 \wedge (V_1 \vee V_3)\big)$ oder $(V_0 \wedge V_3)$, nicht aber für $(V_0 \wedge V_2)$.

Die Semantik der Aussagenlogik (1/2)

Wir definieren eine Funktion $[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}}$,

- die jeder Formel $\phi \in \mathsf{AL}$
- und jeder zu ϕ passenden Belegung $\mathcal{B}$

einen **Wahrheitswert** (kurz: Wert) $[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} \in \{0, 1\}$ zuordnet.

Wir benutzen wieder, wie im Fall der Definition der Syntax,

eine rekursive Definition über den Aufbau aussagenlogischer Formeln.

1. Zuerst definieren wir Wahrheitswerte für atomare Formeln
2. und dann für Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen, Implikationen, Äquivalenzen und XOR.

REKURSIONSANFANG: $[\![\mathbf{0}]\!]^{\mathcal{B}} := 0$, $[\![\mathbf{1}]\!]^{\mathcal{B}} := 1$ und
F.a. $X \in$ AVAR, für die $\mathcal{B}$ definiert ist, gilt: $[\![X]\!]^{\mathcal{B}} := \mathcal{B}(X)$.

REKURSIONSSCHRITT:

- Ist $\phi \in$ AL, so ist $[\![\neg\phi]\!]^{\mathcal{B}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 0 \\ 0, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 1. \end{cases}$
- Ist $\phi \in$ AL und $\psi \in$ AL, so ist
  - $[\![(\phi \wedge \psi)]\!]^{\mathcal{B}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
  - $[\![(\phi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{B}} := \begin{cases} 0, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 0 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
  - $[\![(\phi \rightarrow \psi)]\!]^{\mathcal{B}} := \begin{cases} 0, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
  - $[\![(\phi \leftrightarrow \psi)]\!]^{\mathcal{B}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
  - $[\![(\phi \oplus \psi)]\!]^{\mathcal{B}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} \neq [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Erfüllende und falsifizierende Belegungen

ϕ sei eine Formel und $\mathcal{B}$ eine Belegung für ϕ.

1. $\mathcal{B}$ **erfüllt** ϕ (bzw. $\mathcal{B}$ ist eine erfüllende Belegung) für ϕ), falls

$$[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 1.$$

2. $\mathcal{B}$ **falsifiziert** ϕ (bzw. $\mathcal{B}$ ist eine falsifizierende Belegung für ϕ), falls

$$[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 0.$$

Beispiel

Betrachte die Formel

$$\phi \ := \ \big(\neg V_0 \vee (V_5 \to V_1)\big).$$

Dann ist beispielsweise die Funktion

$$\mathcal{B}\colon \{V_0, V_1, V_5\} \to \{0, 1\}$$

mit

$$\mathcal{B}(V_0) := 1, \mathcal{B}(V_1) := 1 \text{ und } \mathcal{B}(V_5) := 0$$

eine Belegung für ϕ.

Bestimme den Wahrheitswert $[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}}$ von ϕ unter Belegung $\mathcal{B}$.

Wie bestimmt man Wahrheitswerte?
Zum Beispiel mit Wahrheitstafeln!

Für jede Formel ψ kann man

die Wahrheitswerte von ψ unter allen möglichen Belegungen

in einer Wahrheitstafel (manchmal auch Funktionstafel genannt) darstellen.

(a) Die **Wahrheitstafel** hat für jede Belegung $\mathcal{B} : \text{Var}(\psi) \to \{0, 1\}$ eine Zeile.

(b) Die Zeile für $\mathcal{B}$ enthält mindestens

1. f.a. $X \in \text{Var}(\psi)$ die Werte $\mathcal{B}(X)$ und
2. den Wert $[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}}$.

Um die Wahrheitstafel für ϕ auszufüllen, ist es ratsam, auch Spalten für (alle oder einige) „Teilformeln" von ϕ einzufügen.

(a) Wahrheitstafel für $\phi := (\neg V_0 \vee (V_5 \rightarrow V_1))$:

V_0	V_1	V_5	$\neg V_0$	$(V_5 \rightarrow V_1)$	ϕ
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

(b) Wahrheitstafel für $\phi := \Big(X \wedge ((\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}) \rightarrow \mathbf{0})\Big)$:

X	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0})$	$((\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}) \rightarrow \mathbf{0})$	ϕ
0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1

- **Atomare Formeln**:
  - **1** und **0** bedeuten einfach „wahr“ und „falsch“.
  - Die Variablen $X \in \text{AVAR}$ stehen für irgendwelche Aussagen.
    Uns interessiert hier nur, ob diese Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind — und dies wird durch eine Belegung $\mathcal{B}$ angegeben.
- **Negation**: $\neg\phi$ bedeutet „*nicht* ϕ“.

  Zugehörige Wahrheitstafel:

$[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![\neg\phi]\!]^{\mathcal{B}}$
0	1
1	0

- **Konjunktion**: $(\phi \wedge \psi)$ bedeutet „ϕ *und* ψ".
  Zugehörige Wahrheitstafel:

$[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![(\phi \wedge \psi)]\!]^{\mathcal{B}}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Disjunktion, bzw. inklusives Oder**: $(\phi \vee \psi)$ bedeutet „ϕ *oder* ψ".
  Zugehörige Wahrheitstafel:

$[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![(\phi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{B}}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- **Implikation**: $(\phi \to \psi)$ bedeutet „ϕ *impliziert* ψ“, d.h. „*wenn* ϕ*, dann auch* ψ“, bzw. „ϕ *nur wenn* ψ“.

  Zugehörige Wahrheitstafel:

$[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![(\phi \to \psi)]\!]^{\mathcal{B}}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- **Äquivalenz**: $(\phi \leftrightarrow \psi)$ bedeutet „ϕ *gilt genau dann, wenn* ψ gilt“.

  Zugehörige Wahrheitstafel:

$[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![(\phi \leftrightarrow \psi)]\!]^{\mathcal{B}}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wahrheitstafeln für die Junktoren (4/4)

- **Xor, bzw. exklusives Oder**: $(\phi \oplus \psi)$ bedeutet „entweder ϕ *oder* ψ“, bzw. „genau eine der beiden Aussagen ϕ, ψ“

  Zugehörige Wahrheitstafel:

$[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}}$	$[\![(\phi \oplus \psi)]\!]^{\mathcal{B}}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Der Sprachgebrauch für „oder“ ist unscharf und meint

- manchmal das „inklusive Oder“
  (wie in „Anna oder Xaver helfen beim Umzug“) und
- manchmal das „exklusive Oder“
  (wie in „Ansgar oder Xenia fahren den Laster“).

Kommutativität und Assoziativität

Die Junktoren

$$\vee, \wedge, \leftrightarrow, \oplus$$

sind kommutativ und assoziativ.

D.h. für $\circ \in \{ \vee, \wedge, \leftrightarrow, \oplus \}$, für alle Belegungen $\mathcal{B}$ und für alle aussagenlogischen Formeln ϕ, χ und ψ gilt:

- **Kommutativität**: $\phi \circ \psi$ ist genau dann wahr, wenn $\psi \circ \phi$ wahr ist.
- **Assoziativität**: $\phi \circ (\chi \circ \psi)$ ist genau dann wahr, wenn $(\phi \circ \chi) \circ \psi$ wahr ist. Der Wahrheitswert hängt also nicht von der Klammerung ab.

  Wir schreiben deshalb $\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i$ bzw. $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$ an Stelle von $\Big(\big((\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3 \big) \wedge \cdots \wedge \phi_n \Big)$ Analog für „$\vee, \leftrightarrow$ und $\oplus$“ an Stelle von „$\wedge$“.

Achtung: Die Implikation $\rightarrow$ ist weder kommutativ noch assoziativ.

Frage: Für welche Belegungen ist $V_1 \circ \cdots \circ V_n$ wahr, wenn $\circ \in \{ \vee, \wedge, \leftrightarrow, \oplus \}$?

Widersprüche und Tautologien

Erfüllbare, widersprüchliche und allgemeingültige Formeln

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel.

(a) ϕ heißt **erfüllbar**, wenn es **mindestens eine** erfüllende Belegung $\mathcal{B}$ für ϕ gibt.

- Die Belegung $\mathcal{B}$ passt zu ϕ und es gilt $[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$.

(b) ϕ heißt **falsifizierbar**, wenn es **mindestens** eine falsifizierende Belegung für ϕ gibt,

- Die Belegung $\mathcal{B}$ passt zu ϕ und es gilt $[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 0$.

(c) ϕ heißt **unerfüllbar** (oder **widersprüchlich**), wenn **alle** zu ϕ passenden Belegungen ϕ falsifizieren.

(d) ϕ heißt **allgemeingültig** (oder eine **Tautologie**), wenn **alle** zu ϕ passenden Belegungen ϕ erfüllen.

Beispiele

(a) Die Formel

$$((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y))$$

ist **erfüllbar**,

- denn jede Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(Y) = 1$ erfüllt die Formel,

aber auch **falsifizierbar** und deshalb **nicht allgemeingültig**,

- denn jede Belegung $\mathcal{B}'$ mit $\mathcal{B}'(Y) = 0$ falsifiziert die Formel.

(b) Die Formel

$$(X \wedge \neg X)$$

ist **unerfüllbar** (oder **widersprüchlich**), da für jede zur Formel passenden Belegung $\mathcal{B}$ entweder $\mathcal{B}(X) = 1$ oder $\mathcal{B}(X) = 0$ gilt.

- Ist $\mathcal{B}(X) = 1$, so gilt: $[\![(X \wedge \neg X)]\!]^{\mathcal{B}} = 1 \wedge 0 = 0$,
- Ist $\mathcal{B}(X) = 0$, so gilt: $[\![(X \wedge \neg X)]\!]^{\mathcal{B}} = 0 \wedge 1 = 0$.

(c) Die Formel

$$(X \vee \neg X)$$

ist **allgemeingültig**, da für jede zur Formel passenden Belegung $\mathcal{B}$ entweder $\mathcal{B}(X) = 1$ oder $\mathcal{B}(X) = 0$ gilt.

Und nochmals Wahrheitstafeln

Für jede aussagenlogische Formel ϕ gilt:

(a)	ϕ ist erfüllbar	$\iff$	in der Wahrheitstafel für ϕ steht in der mit „ϕ“ beschrifteten Spalte mindestens eine 1.
(b)	ϕ ist unerfüllbar	$\iff$	in der Wahrheitstafel für ϕ stehen in der mit „ϕ“ beschrifteten Spalte nur Nullen.
(c)	ϕ ist allgemeingültig	$\iff$	in der Wahrheitstafel für ϕ stehen in der mit „ϕ“ beschrifteten Spalte nur Einsen.
(d)	ϕ ist allgemeingültig	$\iff$	$\neg\phi$ ist unerfüllbar.
(e)	ϕ ist falsifizierbar	$\iff$	in der Wahrheitstafel für ϕ steht in der mit „ϕ“ beschrifteten Spalte mindestens eine 0.
		$\iff$	ϕ ist nicht allgemeingültig.

Semantische Folgerung und Äquivalenz

(Semantische) Folgerung

ϕ, ψ seien aussagenlogische Formeln und Φ eine Menge von Formeln.

1. ψ **folgt aus** ϕ, bzw. ϕ **impliziert** ψ, kurz

   $$\phi \models \psi,$$

   falls $\phi \to \psi$ allgemeingültig ist, bzw. falls

   $$[\![\phi \to \psi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$$

   für **jede** zu ϕ und ψ passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt.

2. ψ **folgt aus** Φ, bzw. Φ **impliziert** ψ, kurz

   $$\Phi \models \psi,$$

   falls **jede** Belegung, die zu allen Formeln in Φ und zu ψ passt und die alle Formeln in Φ erfüllt, auch ψ erfüllt.

Ein Beispiel

Wir betrachten

$$\phi := \big((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y)\big) \text{ und } \psi := \big(Y \vee (\neg X \wedge \neg Y)\big).$$

- Wir stellen die Wahrheitstafel für ϕ und ψ auf:

X	Y	$(X \vee Y)$	$(\neg X \vee Y)$	$\neg X \wedge \neg Y$	ϕ	ψ
0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

- In jeder Zeile, in der eine 1 in der Spalte von „ϕ“ steht, steht auch in der Spalte von „ψ“ eine 1.
  - Somit gilt $\phi \models \psi$.
- Aber in Zeile 1, also für die Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(X) = 0$ und $\mathcal{B}(Y) = 0$, steht in der Spalte von “ψ“ eine 1 und in der Spalte von “ϕ“ eine 0.
  - Es gilt also $[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$ und $[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = 0$.
  - Daher gilt $\psi \not\models \phi$.

Wie passt das alles zusammen?

Seien ϕ und ψ beliebige aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

(a) $\mathbf{1} \models \phi \iff \phi$ ist allgemeingültig,

(b) $\phi \models \mathbf{0} \iff \phi$ ist unerfüllbar,

(c) $\phi \models \psi \iff (\phi \to \psi)$ ist allgemeingültig und

(d) $\phi \models \psi \iff (\phi \land \neg\psi)$ ist unerfüllbar.

Logische Äquivalenz

1. Zwei aussagenlogische Formeln ϕ und ψ heißen **äquivalent**, kurz:

$$\phi \equiv \psi,$$

   wenn für alle zu ϕ und ψ passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$[\![\phi]\!]^{\mathcal{B}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}}.$$

2. Zwei Mengen Φ und Ψ aussagenlogischer Formeln heißen **äquivalent**, kurz:

$$\Phi \equiv \Psi,$$

   wenn $\Phi \models \psi$ für alle Formeln $\psi \in \Psi$ und $\Psi \models \phi$ für alle Formeln $\phi \in \Phi$ gilt.

ϕ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn in ihrer Wahrheitstafel

die Spalten von ϕ und ψ übereinstimmen.

Ein Beispiel

Sind

$$\phi := \big(X \wedge (X \vee Y)\big) \text{ und } \psi := X$$

äquivalent?

- Wir stellen die Wahrheitstafel auf:

X	Y	$(X \vee Y)$	ϕ	ψ
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

- Die Spalte von „ϕ“ stimmt überein mit der Spalte von „ψ“: Es folgt

$$\phi \equiv \psi.$$

Wie passt das alles zusammen?

Seien ϕ und ψ aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

(a) $\phi \equiv \psi \iff (\phi \leftrightarrow \psi)$ ist allgemeingültig $\iff \phi \models \psi$ und $\psi \models \phi$.

(b) ϕ ist allgemeingültig $\iff \phi \equiv \mathbf{1} \iff \mathbf{1} \models \phi$.

(c) ϕ ist unerfüllbar $\iff \phi \equiv \mathbf{0} \iff \phi \models \mathbf{0}$.

(d) ϕ ist erfüllbar $\iff \phi \not\equiv \mathbf{0}$, d.h. „$\phi \equiv \mathbf{0}$" gilt nicht $\iff \phi \not\models \mathbf{0}$.

(e) ϕ ist falsifizierbar $\iff \phi \not\equiv \mathbf{1} \iff \mathbf{1} \not\models \phi$.

Fundamentale Äquivalenzen (1/2)

Seien ϕ, ψ und χ aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

(a) **Idempotenz:**

- $(\phi \wedge \phi) \equiv \phi$
- $(\phi \vee \phi) \equiv \phi$

(b) **Kommutativität:** Für $\circ \in \{\vee, \wedge, \leftrightarrow, \oplus\}$ gilt

- $(\phi \circ \psi) \equiv (\psi \circ \phi)$

(c) **Assoziativität:** Für $\circ \in \{\vee, \wedge, \leftrightarrow, \oplus\}$ gilt

- $((\phi \circ \psi) \circ \chi) \equiv (\phi \circ (\psi \circ \chi))$

(d) **Absorption:**

- $(\phi \wedge (\phi \vee \psi)) \equiv \phi$
- $(\phi \vee (\phi \wedge \psi)) \equiv \phi$

(e) **Distributivität:**

- $(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))$
- $(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))$

Fundamentale Äquivalenzen (2/2)

(f) **Doppelte Negation:**
- $\neg\neg\phi \equiv \phi$

(g) **De Morgansche Regeln:**
- $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$
- $\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$

(h) **Tertium non Datur:**
- $(\phi \wedge \neg\phi) \equiv \mathbf{0}$
- $(\phi \vee \neg\phi) \equiv \mathbf{1}$

(i) **True/False 1**
- $(\phi \wedge \mathbf{1}) \equiv \phi$
- $(\phi \wedge \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$
- $(\phi \vee \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$
- $(\phi \vee \mathbf{0}) \equiv \phi$

(j) **True/False 2**
- $\mathbf{1} \equiv \neg\mathbf{0}$
- $\mathbf{0} \equiv \neg\mathbf{1}$

(k) **Elimination der Implikation:**
- $(\phi \to \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi) \equiv \neg(\phi \wedge \neg\psi)$

(l) **Elimination von Äquivalenz und XOR:**
- $\neg(\phi \oplus \psi) \equiv (\phi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))$

Zurück zum „Geburtstagsproblem“

Sei ϕ die Formel aus dem Geburtagsproblem. Die Frage

> *„Wie viele (und welche) Freunde werden bestenfalls zu Fred's Party kommen?“*

können wir lösen, indem wir

1. die Wahrheitstafel für ϕ ermitteln,
2. alle Zeilen heraussuchen,
   in denen in der mit „ϕ“ beschrifteten Spalte der Wert 1 steht und
3. aus diesen Zeilen all jene heraussuchen, bei denen in den mit A, B, C, D, E beschrifteten Spalten möglichst viele Einsen stehen.

   Jede dieser Zeilen repräsentiert dann eine größtmögliche Konstellation von gleichzeitig erscheinenden Freunden.

A	B	C	D	E	$E \to (C \land D)$	$C \to A$	$(B \land E) \to \neg D$	$A \to (B \lor C)$	$(B \land A) \to \neg E$	φ
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0

Das Geburtstagsproblem: Die Lösung

Es gibt keine Zeile mit genau 5 Einsen, aber genau zwei Zeilen mit insgesamt 4 Einsen in den mit A bis E beschrifteten Spalten:

Es handelt sich um die beiden Belegungen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ mit

$$\mathcal{B}_1(A) = \mathcal{B}_1(C) = \mathcal{B}_1(D) = \mathcal{B}_1(E) = 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_1(B) = 0$$

und

$$\mathcal{B}_2(A) = \mathcal{B}_2(B) = \mathcal{B}_2(C) = \mathcal{B}_2(D) = 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2(E) = 0.$$

Bestenfalls werden 4 der 5 Freunde kommen, und dafür gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich

(1) dass alle außer Bernd kommen, und

(2) dass alle außer Eva kommen.

Müssen wir die Wahrheitstafel vollständig bestimmen?

Für das Geburtstagsproblem ist es völlig ausreichend, wenn wir

(a) uns zuerst überzeugt hätten, dass alle fünf Freunde nicht zugleich zur Party kommen werden,

(b) und dann die **fünf** Belegungen untersucht hätten, in denen genau ein Freund nicht kommt.

(c) Warum stur die letzten sechs Spalten berechnen?

- Hat eine der Spalten 6-10 den Wert „falsch" erhalten, ist ϕ falsch und der Wert der verbleibenden Spalten ist uninteressant.

Bitte schön: Immer mit Köpfchen!

Wie groß sind denn Wahrheitstafeln?

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Wie viele Belegungen hat ϕ, d.h. wieviele Funktionen $\mathcal{B} : \mathrm{Var}(\phi) \to \{0,1\}$ gibt es? Genau

$$|\mathrm{Abb}(\mathrm{Var}(\phi), \{0,1\})| = |\{0,1\}|^{|\mathrm{Var}(\phi)|} = 2^{|\mathrm{Var}(\phi)|}$$

viele.

Sei

$$n := |\mathrm{Var}(\phi)|$$

die Anzahl der in ϕ vorkommenden Variablen. Dann gibt es

$$\mathbf{2^n}$$

verschiedene zu ϕ passende Belegungen $\mathcal{B} : \mathrm{Var}(\phi) \to \{0,1\}$.

Die Größe von Wahrheitstafeln (2/2)

Die Wahrheitstafel einer Formel mit n Variablen hat genau 2^n Zeilen.

Ist das gut oder schlecht?

n (Anzahl Variablen)	2^n	(Anzahl Zeilen der Wahrheitstafel)		
10	$2^{10} =$	1.024	$\approx$	10^3
20	$2^{20} =$	1.048.576	$\approx$	10^6
30	$2^{30} =$	1.073.741.824	$\approx$	10^9
40	$2^{40} =$	1.099.511.627.776	$\approx$	10^{12}
50	$2^{50} =$	1.125.899.906.842.624	$\approx$	10^{15}
60	$2^{60} =$	1.152.921.504.606.846.976	$\approx$	10^{18}

Zum Vergleich: Das Alter des Universums wird auf $13,7$ Milliarden Jahre, das sind ungefähr 10^{18} Sekunden, geschätzt.

Wir bauen eine disjunktive Normalform aus einer Wahrheitstafel

Literale, Konjunktionsterme und disjunktive Normalformen

(a) Ein **Literal** ℓ ist eine Formel der Form $\ell = X$ oder $\ell = \neg X$ mit $X \in \text{AVAR}$, d.h. X ist eine Variable.

- Das Literal X wird auch **positives Literal** genannt,
- das Literal $\neg X$ heißt **negatives Literal**.

(b) Eine Konjunktion von (positiven oder negativen) Literalen heißt ein **Konjunktionsterm**.

(c) Eine Disjunktion

$$\psi = \bigvee_{i=1}^{k} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j} \right)$$

von Konjunktionstermen $\bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j}$ ist in

disjunktiver Normalform (DNF),

wenn $k, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\ell_{i,j}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, m_i\}$ ein Literal ist.

- Gilt $\phi \equiv \psi$, dann heißt ψ eine **DNF für ϕ**, bzw. ϕ **besitzt die DNF ψ**.

1. Besitzt jede aussagenlogische Formel eine DNF?
2. Wie lassen sich DNFs konstruieren?
3. Können wir sogar „kleine“ DNFs finden?

Die Wahrheitstafel T sei gegeben: Baue eine DNF ψ mit T als Wahrheitstafel.

1. Sei z eine Zeile der Wahrheitstafel T
   - z heißt eine **1-Zeile**, wenn in der Spalte des Wahrheitswerts eine „1" steht.
   - Steht in der Spalte des Wahrheitswerts eine „0", nennen wir z eine **0-Zeile**.
2. Die Menge aller Variablen der Wahrheitstafel T bezeichnen wir mit $\text{Var}(T)$.
3. Für jede 1-Zeile z mit Belegung $\mathcal{B}_z : \text{Var}(T) \to \{0, 1\}$ definieren wir die **Vollkonjunktion Konj_z** von **z** als den Konjunktionsterm
   - in dem **jede** Variable $V \in \text{Var}(T)$ als Literal V oder $\neg V$ vorkommt und
   - der von $\mathcal{B}_z$ erfüllt, aber von den Belegungen zu anderen Zeilen falsifiziert wird.

Die Vollkonjunktion der 1-Zeile z hat also die Form

$$\text{Konj}_z = \Big(\bigwedge_{V \in \text{Var}(T) : \mathcal{B}_z(V)=1} V \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{V \in \text{Var}(T) : \mathcal{B}_z(V)=0} \neg V \Big).$$

Die Wahrheitstafel T sei gegeben: Baue eine DNF ψ mit T als Wahrheitstafel.

1. Die Vollkonjunktion der 1-Zeile z hat die Form

$$\mathrm{Konj}_z = \Big(\bigwedge_{V \in \mathrm{Var}(T) : \mathcal{B}_z(V)=1} V \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{V \in \mathrm{Var}(T) : \mathcal{B}_z(V)=0} \neg V \Big).$$

2. Die Disjunktion

$$\psi := \bigvee_{z \text{ ist eine 1-Zeile}} \mathrm{Konj}_z,$$

   also die „Ver*oder*ung“ aller Vollkonjunktionen zu 1-Zeilen der Wahrheitstafel, heißt

   kanonische DNF der Wahrheitstafel.

DNFs: Ein erstes Beispiel

Betrachte die Wahrheitstafel T:

X	Y	Z	ϕ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Es gibt genau drei 1-Zeilen (für die in der „Spalte von ϕ“ eine 1 steht), nämlich

X	Y	Z	ϕ	zur Belegung der Zeile gehörende Vollkonjunktion:
0	0	0	1	$\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$
1	0	0	1	$X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$
1	0	1	1	$X \wedge \neg Y \wedge Z$

Wir erhalten die zur Wahrheitstafel T passende kanonische DNF

$$\psi \ := \ (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \ \vee \ (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \ \vee \ (X \wedge \neg Y \wedge Z).$$

Wahrheitstafel $\Rightarrow$ DNF (3/3)

Die Wahrheitstafel T sei gegeben: Baue eine DNF ψ mit T als Wahrheitstafel.

Die kanonische DNF von T ist

$$\psi := \bigvee_{z \text{ ist eine 1-Zeile}} \underbrace{\left(\Big(\bigwedge_{V \in \mathrm{Var}(T) : \mathcal{B}_z(V)=1} V \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{V \in \mathrm{Var}(T) : \mathcal{B}_z(V)=0} \neg V \Big) \right)}_{=\mathrm{Konj}_z}.$$

Es gilt $[\![\mathrm{Konj}_u]\!]^{\mathcal{B}_u} = 1$ und, falls $u \neq v$ ist $[\![\mathrm{Konj}_u]\!]^{\mathcal{B}_v} = 0$.

(a) Ist u eine 1-Zeile von T, dann ist Konj_u **ein** Konjunktionsterm von $\psi \Longrightarrow$

$$[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}_u} = [\![\bigvee_{z \text{ ist eine 1-Zeile}} Konj_z]\!]^{\mathcal{B}_u} = 1.$$

(b) Ist u eine 0-Zeile von T, dann ist Konj_u **kein** Konjunktionsterm von ψ und $[\![\mathrm{Konj}_z]\!]^{\mathcal{B}_u} = 0$ für alle 1-Zeilen $z \Longrightarrow$

$$[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}_u} = 0.$$

ψ besitzt T als Wahrheitstafel.

Jede Wahrheitstafel besitzt eine DNF

(a) Zu jeder Wahrheitstafel T gibt es eine DNF ψ, so dass T die Wahrheitstafel von ψ ist.
- Wir sagen, dass ψ eine DNF für T ist.

(b) Insbesondere besitzt jede aussagenlogische Formel ϕ eine DNF.
- Wir sagen, dass ψ eine DNF für ϕ ist.

Die Größe einer DNF

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel.

(a) Die kanonischen DNF für ϕ hat so viele Vollkonjunktionen wie ϕ erfüllende Belegungen besitzt. (Eine 1-Zeile für jede erfüllende Belegung von ϕ).

- Die Formel $V_1 \vee \cdots \vee V_n$ ist selbst eine DNF mit **n** Konjunktionstermen,
- ihre kanonische DNF besteht aber aus $\mathbf{2^n - 1}$ Vollkonjunktionen.

Autsch!

(b) Für Formeln mit vielen erfüllenden Belegungen sollten wir DNFs mit nur wenigen Konjunktionstermen suchen.

Aber wie?

Implikanten und Primimplikanten

Implikant und Primimplikant

Um mit DNFs effizient arbeiten zu können, versuchen wir **kleine** DNFs, also DNFs mit möglichst wenigen Konjunktionstermen zu erhalten.

(a) Ein Konjunktionsterm K heißt ein **Implikant** der Formel ϕ, wenn

$$K \models \phi$$

gilt. Ein Implikant von ϕ „impliziert" also die Formel ϕ.

(b) Ein Implikant K heißt ein **Primimplikant** von ϕ, wenn K nicht verkürzbar ist, wenn also K, nach Streichen eines Literals kein Implikant von ϕ mehr ist.

- Die Konjunkionsterme einer DNF für ϕ implizieren $\phi \Longrightarrow$ DNFs bestehen nur aus Implikanten.
- Um kleine DNFs zu bauen, brauchen wir

  möglichst allgemeine Implikanten,

  nämlich Primimplikanten.

Satz von Quine

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel.

(a) Jede DNF für ϕ ist eine Disjunktion von Implikanten von ϕ.

(b) Dann gilt für jeden Konjunktionsterm K und jede Variable V von ϕ, die nicht in K vorkommt,

$$K \text{ ist ein Implikant von } \phi \iff K \wedge V \text{ und } K \wedge \neg V \text{ sind Implikanten von } \phi$$

(c) Es gibt eine DNF für ϕ mit einer kleinstmöglichen Anzahl von Konjunktionstermen, die nur aus Primimplikanten von ϕ besteht.

(d) Sind alle Primimplikanten von ϕ Vollkonjunktionen, dann ist die kanonische DNF, bis auf die Reihenfolge ihrer Konjunktionsterme, die einzige DNF.

Beweis: Siehe Tafel.

In der Veranstaltung „**Hardware Architekturen und Rechensysteme**“ lernen Sie das Quine-McCluskey Verfahren kennen, das alle Primplikanten bestimmt und dann versucht eine möglichst kleine DNF zu „bauen“.

Wie bestimmt man alle (Prim-)Implikanten?

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel mit n Variablen.

1. Bestimme alle Implikanten von ϕ mit n Variablen.

   /* Die Implikanten der „Länge“ n entsprechen den Konjunktionstermen der kanonischen DNF, also den 1-Zeilen der Wahrheitstafel von ϕ. */

2. Unterscheiden sich Implikanten $K \wedge V, K \wedge \neg V$ nur in der Variable V, dann ist auch K ein Implikant (mit $n-1$ Variablen).

   /* Man erhält jeden Implikanten (mit $n-1$ Variablen) auf diese Weise. */

3. Wende das Verfahren aus Schritt (2) rekursiv auf alle Implikanten von ϕ mit genau $n-1$ Variablen an.

Man erhält die Menge aller Primimplikanten von ϕ als die Menge aller nicht weiter verkürzbaren Implikanten von ϕ.

Minimierung von DNFs: Beispiele (1/2)

Im letzten Beispiel haben wir die kanonische DNF

$$\phi \;:=\; (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z).$$

gefunden.

1. Welche Primimplikanten hat ϕ?
2. Besitzt ϕ eine kleinere DNF?

Antworten: Siehe Tafel.

Minimierung von DNFs: Beispiele (2/2)

Die Minimierung von DNFs ist eine schwierige Aufgabe!

$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ seien aussagenlogische Variablen. Betrachte die Formel

$$\psi_n \quad := \quad \bigvee_{i=1}^{n} (X_i \oplus Y_i).$$

Die **kanonische** DNF für ψ_n besteht aus $\mathbf{2^{2n} - 2^n}$ Konjunktionstermen!
ψ_n hat aber die viel, viel kleinere DNF

$$\psi_n = \bigvee_{i=1}^{n} (X_i \wedge \neg Y_i) \vee \bigvee_{i=1}^{n} (\neg X_i \wedge Y_i)$$

mit **2n** Konjunktionstermen,

Warum? Siehe Tafel.

Achtung, Achtung, Achtung!

Gibt es aber **immer** **kleine** DNFs?

$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ seien aussagenlogische Variablen. Betrachte die Formel

$$\phi_n \quad := \quad \bigwedge_{i=1}^{n} (X_i \leftrightarrow Y_i).$$

Dann hat **jede** zu ϕ_n äquivalente DNF mindestens

$$\mathbf{2^n}$$

Konjunktionsterme.

Beweis: Warum?

(a) Jeder Primimplikant ist eine Vollkonjunktion. $\Longrightarrow$

(b) Die kanonische DNF ψ hat die kleinste Anzahl an Konjunktionstermen.

(c) ϕ_n hat aber genau 2^n 1-Zeilen $\Longrightarrow \psi$ hat 2^n Konjunktionsterme.

Die konjunktive Normalform

Disjunktionsterme und KNFs

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel.

- Ein **Disjunktionsterm** (oder eine **Klausel**) ist eine Disjunktion von Literalen.
- Eine Konjunktion

$$\psi = \bigwedge_{i=1}^{k} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j} \right)$$

  von Disjunktionstermen $\bigvee_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j}$ ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn $k, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\ell_{i,j}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, m_i\}$ ein Literal ist.

  - Ist $\phi \equiv \psi$, dann heißt ψ eine **KNF für** ϕ, bzw. wir sagen, dass ϕ die **KNF** ψ **besitzt**.

Wahrheitstafel $\Rightarrow$ KNF

Die Wahrheitstafel T sei gegeben: Baue eine KNF ψ mit T als Wahrheitstafel.

1. Invertiere die Wahrheitstafel: Ersetze in jeder Zeile den Wahrheitswert für ϕ durch $\neg\phi$.
2. Baue die DNF
$$\psi = \bigvee_{i=1}^{k} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j} \right)$$
für die negierte Wahrheitstafel, also für $\neg\phi$.
3. Wende die **De Morgan Regeln** an:
$$\neg\psi = \neg \bigvee_{i=1}^{k} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j} \right) = \bigwedge_{i=1}^{k} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \neg\ell_{i,j} \right) =: \psi'$$
ist die gewünschte KNF für $\neg\neg\phi \equiv \phi$.

KNFs: Beispiele

Wir betrachten die Wahrheitstafel T:

X	Y	Z	ϕ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Wie sieht die kanonische KNF in diesem Beispiel aus? Siehe Tafel

DNFs und KNFs

Für jede aussagenlogische Formel ϕ gibt es eine Formel ψ_D in DNF und eine Formel ψ_K in KNF, so dass

$$\phi \equiv \psi_D \text{ und } \phi \equiv \psi_K.$$

Jede Formel ist äquivalent zu einer Formel in DNF und zu einer Formel in KNF.

Normalformen spielen in vielen Anwendungsgebieten eine wichtige Rolle.

- Beispielsweise geht man in der Schaltungstechnik (Hardware-Entwurf) oft von DNF- oder KNF-Formeln aus,
- während bei der Wissensrepräsentation häufig KNF-Formeln auftreten, da hier viele, aber **einfach strukturierte** Aussagen „verundet" werden.

KNFs: Beispiele

(a) DNFs für

$$\phi_n = \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(X_i \leftrightarrow Y_i \Big)$$

benötigen **viele** Konjunktionsterme. Aber ϕ_n hat doch eine „kleine“ KNF **:-)))**

(b) Können wir Sudokus erfolgreich mit Hilfe von KNFs vervollständigen?

						9		
7	9			6				
		5		3			1	4
	4				6			7
		3	2	1		5		
	7						8	
					1		9	2
			5			7		
	1			9	4		5	

Sudokus mit KNFs modellieren (1/3)

1. Benutze die Variablen $Z_{i,j}^{k}$ für $1 \leqslant i, j, k \leqslant 9$.
   - $Z_{i,j}^{k} = 1$ soll bedeuten, dass in Zeile i und Spalte j die Zahl k steht.
2. Für jede **Zeile** i und jede **Ziffer** k fordern wir
   - im Disjunktionsterm $\mathbf{Mindestens}_i^k$, dass die Ziffer k mindestens einmal erscheint

$$\mathbf{Mindestens}_i^k := \bigvee_{j=1}^{9} Z_{i,j}^{k}.$$

   - Die Ziffer k soll in Zeile i nicht zweimal vergeben werden $\Longrightarrow$ für alle Spalten $j \neq j^*$ mit $1 \leqslant j \leqslant j^* \leqslant 9$ und alle Ziffern k soll gelten

$$Z_{i,j}^{k} \rightarrow \neg Z_{i,j^*}^{k}.$$

   - Beachte die Äquivalenz $(Z_{i,j}^{k} \rightarrow \neg Z_{i,j^*}^{k}) \equiv (\neg Z_{i,j}^{k} \vee \neg Z_{i,j^*}^{k})$. Wie drückt man aus, dass die Ziffer k genau einmal in Zeile i erscheint? Definiere die KNF

$$\mathbf{Zeile}_i^k := \mathbf{Mindestens}_i^k \wedge \bigwedge_{j=1}^{8} \bigwedge_{j^*=j+1}^{9} (\neg Z_{i,j}^{k} \vee \neg Z_{i,j^*}^{k}).$$

Sudokus mit KNFs modellieren (2/3)

3. Wie drückt man aus, dass **jede Ziffer** genau einmal in **jeder Zeile** vorkommt? Definiere die KNF

$$\textbf{Zeilen} := \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \text{Zeile}_i^k .$$

4. Auf ähnliche Art definieren wir KNFs

   Spalten und **Teilmatrizen**

   für die Spalten und 3×3 Teilmatrizen, um diesmal auszudrücken, dass jede Ziffer in jeder Spalte, bzw. in jeder Teilmatrix genau einmal vorkommt.
5. Keine Zelle (i, j) darf zwei oder mehr Ziffern erhalten. Fordere

$$Z_{i,j}^{k} \to \neg Z_{i,j}^{k^*}$$

   für alle $1 \leqslant i, j \leqslant 9$ und alle verschiedenen Ziffern k und k^*. Wie drücken wir aus, dass in **jeder** Zelle höchstens eine Ziffer stehen darf? Durch die KNF

$$\textbf{Einfach} := \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{8} \bigwedge_{k^*=k+1}^{9} (\neg Z_{i,j}^{k} \vee \neg Z_{i,j}^{k^*}).$$

6. Ist die Zelle in Zeile i und Spalte j mit der Ziffer k bereits gesetzt, dann füge den Disjunktionsterm
$$Z_{i,j}^{k}$$
hinzu und definiere die KNF
$$\textbf{Schon\_da}$$
als Konjunktion dieser Disjunktionsterme für alle bereits gesetzten Zellen.

In der KNF

$$\textbf{Sudoku} := \textbf{Zeilen} \wedge \textbf{Spalten} \wedge \textbf{Teilmatrizen} \wedge \textbf{Einfach} \wedge \textbf{Schon\_da}$$

sind alle Sudoku-Regeln umgesetzt:

Genau die erfüllenden Belegungen lösen das Sudoku-Rätsel. (Warum haben wir nicht fordern müssen, dass jede Zelle mindestens eine Ziffer erhält?)

Das KNF-Erfüllbarkeitsproblem (KNF-SAT)

Eingabe:	Eine aussagenlogische Formel ϕ in KNF.
Frage:	Ist ϕ erfüllbar?

Wie schwierig ist das Erfüllbarkeitsproblem? (1/2)

- Natürlich kann man das Erfüllbarkeitsproblem mit einer Wahrheitstafel lösen.
  - Teste, ob es in der mit „ϕ“ beschrifteten Spalte mindestens eine 1 gibt.
  - Aber die Wahrheitstafel hat **exponentiell** viele Zeilen, nämlich 2^n Zeilen, wenn ϕ von n Variablen abhängt.
- In der „**Theoretischen Informatik 1**“ (3. Semester) wird gezeigt:

Satz von Cook

KNF-SAT ist $\mathtt{NP}$-vollständig.

Wie schwierig ist das Erfüllbarkeitsproblem? (2/2)

- Eine präzise Definition des Begriffs „NP-vollständig“ wird in der **Theoretischen Informatik 1** gegeben.
  - Grob gesagt bedeutet die NP-Vollständigkeit von KNF-SAT, dass es vermutlich kein **effizientes** Verfahren gibt, das KNF-SAT für **alle** Eingabeformeln löst. **:-((**
    - Ein Verfahren wird effizient gennant, wenn seine Laufzeit nur moderat mit der Länge der Formel wächst.
    - Genauer: Die Laufzeit muss polynomiell in der Eingabelänge sein!
- Einige Heuristiken, die so genannten SAT-Solver, lösen KNF-SAT trotzdem für **viele** Eingabe-Formeln **erstaunlich effizient**.
  - Ich muss hoffen, dass ich ein Verfahren finde, dass **meine** Formel schnell genug löst.
  - Aber es gibt wohl kein „einigermaßen“ schnelles Verfahren für **alle** Formeln!

Wie arbeiten denn diese SAT-Solver?

SAT-Solver: Das Beweisverfahren der Resolution

Das Beweisverfahren der Resolution (1/2)

Sei Φ eine Menge von Disjunktionstermen.

(a) Stelle einen **Disjunktionsterm**

$$\gamma = \ell_1 \vee \cdots \vee \ell_m$$

als **Menge**

$$\{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$$

seiner Literale dar.

(b) **Die Resolutionsregel:** Sei X eine Variable, α, β seien Disjunktionsterme. Aus den Disjunktionstermen $\alpha \cup \{X\}$ und $\beta \cup \{\neg X\}$ darf der „Resolutionsterm“ $\alpha \cup \beta$ abgeleitet werden. Man schreibt auch kurz

$$\frac{\alpha \cup \{X\},\ \beta \cup \{\neg X\}}{\alpha \cup \beta}$$

(c) Ein **Resolutionsbeweis**

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{R}} \chi$$

eines Disjunktionsterms χ aus einer Menge Φ von Disjunktionstermen ist ein Tupel

$$(\chi_1, \ldots, \chi_i, \ldots, \chi_n)$$

von Disjunktionstermen. Es muss gelten:

1. χ_n ist die Zielformel, d.h. es gilt $\chi_n = \chi$.
2. Für jedes i mit $1 \leqslant i \leqslant n$ ist
   - χ_i eine Formel aus Φ oder
   - es gibt $1 \leqslant i_1 < i_2 < i$ und χ_i folgt aus χ_{i_1}, χ_{i_2} mit der Resolutionsregel.

Resolution: Ein erstes Beispiel

Zeige die „Transitivität“ der Implikation, d.h. **zeige** $\Phi \vdash_{\mathfrak{R}} \chi$ mit

$$\Phi := \{\, \{\neg X, Y\},\ \{\neg Y, Z\}\, \} \text{ und } \chi := \{\neg X, Z\}.$$

1. Die Formel $\chi_1 := \{\neg X, Y\}$ gehört zu Φ und ist deshalb in $\mathfrak{R}$ ableitbar.
2. Gleiches gilt für die Formel $\chi_2 := \{\neg Y, Z\}$ und deshalb ist auch χ_2 in $\mathfrak{R}$ ableitbar.
3. Jetzt erhalten wir $\chi_3 := \{\neg X, Z\} = \chi$ nach Anwendung der Resolutionsregel
$$\frac{\{\neg X, Y\},\ \{\neg Y, Z\}}{\{\neg X, Z\}}$$
auf χ_1 und χ_2.

KNF-SAT mit Resolutionsbeweisen lösen?!

Ist die KNF $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_m$ erfüllbar?

Sei $\Phi := \{ D_1, \ldots, D_m \}$.

:-)) Wenn es einen Resolutionsbeweis $\Phi \vdash_{\mathfrak{R}} \epsilon$ des leeren Disjunktionsterms ϵ gibt, dann ist Φ **unerfüllbar**!

:-)) Im Skript wird gezeigt: Sei Φ eine Menge von Disjunktionstermen. Dann gilt

$$\left(\bigwedge_{D \in \Phi} D \right) \text{ ist unerfüllbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{R}} \epsilon.$$

.

ϕ ist **genau dann** unerfüllbar, wenn der leere Disjunktionsterm aus Φ mit einem Resolutionsbeweis hergeleitet werden kann.

:-((Leider, leider gibt es aber Formelmengen Φ deren Unerfüllbarkeit nur mit **exponentiell** vielen Resolutionsschritten nachgewiesen werden kann!

- Nicht nur ist das Finden eines „Resolutionsbeweises" kompliziert,
- sondern mgl. gibt es nur sehr, sehr lange Beweise.

Resolution: Ein zweites Beispiel

1. Die Kunden der Bahn sind nicht **z**ufrieden, wenn
   - sich die **P**reise erhöhen: $P \rightarrow \neg Z$ folgt,
   - oder sich die **F**ahrzeiten verlängern, d.h. $F \rightarrow \neg Z$ ist die Konsequenz.
2. Wenn der Frankfurter Kopfbahnhof nicht in einen Durchgangsbahnhof umge**b**aut wird, verlängern sich die Fahrzeiten, also gilt $\neg B \rightarrow F$.
3. Der Bahnhof kann nur dann umgebaut werden, wenn die Fahrpreise erhöht werden, d.h. $B \rightarrow P$ folgt.

Die Bahn kann es niemandem recht machen, denn die Formelmenge

$$\Phi := \Big\{ \{\neg P, \neg Z\},\ \{\neg F, \neg Z\},\ \{B, F\},\ \{\neg B, P\},\ \{Z\} \Big\}$$

ist unerfüllbar.

Wie sieht ein Resolutionsbeweis $\Phi \vdash_{\mathfrak{R}} \epsilon$ aus?

DPLL-Verfahren: Moderne Varianten von Resolutionsbeweisen

1. Wenn Φ aus „offensichtlichen Gründen“ erfüllbar ist, dann halte mit der Antwort „Φ ist erfüllbar“.
2. Wenn $\epsilon \in \Phi$, dann halte mit der Antwort „Φ ist unerfüllbar“.
3. „**Unit-Resolution**“: Wenn $X \in \Phi$ für eine Variable X, dann setze $X = 1$. D.h. entferne alle Disjunktionsterme aus Φ, die X enthalten und entferne jedes Auftreten von $\neg X$ in einem Term von Φ. (Behandle den Fall $\neg X \in \Phi$ analog.)
4. „**Pure Literal Rule**“: Wenn eine Variable X nur positiv in Termen von Φ vorkommt, dann entferne alle Terme aus Φ, in denen X vorkommt. (Die Setzung $X = 1$ kann nicht falsch sein.) Analog, wenn X nur negiert vorkommt.
5. „**Choose Literal**“. Eine Variable X wird ausgewählt.
6. „**Backtracking**“.
   - Rufe das Verfahren rekursiv für $\Phi' := \Phi \cup \{X\}$ auf.
   - Bei Antwort„unerfüllbar“, rufe Verfahren rekursiv für $\Phi' := \Phi \cup \{\neg X\}$ auf.

Boolesche Funktionen und Formeln

Boolesche Funktionen

Eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ heißt eine **boolesche Funktion**.

Beispiele:

(a) Die boolesche Funktion

$$\textbf{Und}_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

nimmt genau dann den Wert 1 für Eingabe x an, wenn $x = 1^n$.

(b) Die **Paritätsfunktion** $p_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ nimmt genau dann den Wert 1 für Eingabe x an, wenn x ungerade viele Einsen besitzt.

- Das „Paritätsbit" $p_n(x_1, \ldots, x_n)$ ändert sich, wenn genau ein Bit „geflippt" wird und wird deshalb zur Fehlererkennung eingesetzt.

(c) $\textbf{Addition}_i : \{0,1\}^{2n} \to \{0,1\}$ ist das $i$te Bit der Summe von zwei n-Bit Zahlen.

Boolesche Funktionen, Wahrheitstafeln und Formeln (1/2)

(a) In einer Wahrheitstafel

- werden die aussagenlogischen Variablen benannt (z.B. seien dies $X_1, \ldots, X_n$) und ihre Reihenfolge wird festgelegt.
- Dann wird für jede Belegung $\mathcal{B} : \{X_1, \ldots, X_n\} \to \{0, 1\}$ eine eigene Zeile angelegt und der Wahrheitswert

$$f(\llbracket X_1 \rrbracket^{\mathcal{B}}, \ldots, \llbracket X_n \rrbracket^{\mathcal{B}})$$

für $\mathcal{B}$ eingetragen. Nenne f **die boolesche Funktion der Wahrheitstafel**.

(b) Die Wahrheitstafel beschreibt f, tut allerdings ein klitzeklein wenig mehr:

- sie benennt auch die aussagenlogischen Variablen und
- gibt ihnen eine Reihenfolge.

Die wesentlichen Eigenschaften einer Wahrheitstafel werden durch ihre boolesche Funktion ausgedrückt.

Boolesche Funktionen, Wahrheitstafeln und Formeln (2/2)

(c) Zu jeder Wahrheitstafel T gibt es eine DNF ψ, so dass ψ die Wahrheitstafel T besitzt. $\Longrightarrow$ Zu jeder Wahrheitstafel gibt es eine „äquivalente“ Formel.

(d) Stelle die Wahrheitstafel einer booleschen Funktion auf:
Auch zu jeder booleschen Funktion gibt es eine „äquivalente“ Formel, nämlich die zur Wahrheitstafel äquivalente Formel.

- Boolesche Funktionen, Wahrheitstafeln und Formeln sind unterschiedliche, aber äquivalente Beschreibungen
- Der Entwurf von Schaltungen für boolesche Funktionen ist ein wichtiges Ziel der technischen Informatik.

Haben boolesche Funktionen immer kleine DNFs oder kleine KNFs?

Wir erinnern an die **Paritätsfunktion** $\oplus_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Dann hat

(a) jede DNF für $\oplus_n$ mindestens $\mathbf{2^{n-1}}$ Konjunktionsterme und

(b) jede KNF für $\oplus_n$ mindestens $\mathbf{2^{n-1}}$ Disjunktionsterme.

Beweis: Zeige zuerst, dass alle Primimplikanten Vollkonjunktionen sind.
Dann wende den Satz von Quine (d) an (siehe Tafel).

Es gibt also boolesche Funktionen, die weder „kleine“ DNFs noch „kleine“ KNFs besitzen!

Zusammenfassung: Aussagenlogik

(a) Belegungen einer aussagenlogischen Formel ϕ sind Funktionen

$$\mathcal{B} : \mathrm{Var}(\phi) \to \{0, 1\},$$

die jeder Variable von ϕ einen Wahrheitswert zuweisen.

- Wenn $|\mathrm{Var}(\phi)| = n$, dann hat ϕ genau $\mathbf{2^n}$ Belegungen.

(b) Wichtige Konzepte für aussagenlogische Formeln:

- Erfüllbarkeit und Falsifizierbarkeit, Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit,
- semantische Folgerung und Äquivalenz.

(c) Normalformen:

- DNFs
  - bestehen aus Implikanten,
  - kleinste DNFs bestehen aus Primimplikanten.
- KNFs
  - Das Erfülbarkeitsproblem ist sehr schwer.
  - Eine KNF ist genau dann unerfüllbar, wenn der leere Disjunktionsterm mit Hilfe der Resolution herleitbar ist.

(d) Verschieden Sichtweisen:

- Jede aussagenlogische Formel ist mit einer Wahrheitstafel äquivalent und
- jede Wahrheitstafel ist mit einer booleschen Funktion äquivalent.

Alles verstanden?
Dann mal ran an das Einstein-Rätsel!

Das Einstein-Rätsel: Wem gehört der Fisch?

1. Der Brite lebt im roten Haus.
2. Die Schwedin hält einen Hund.
3. Der Däne trinkt gern Tee.
4. Das grüne Haus steht (direkt) links neben dem weißen Haus.
5. Die Person, die im grünen Haus wohnt, trinkt Kaffee.
6. Die Person, die Pall Mall raucht, hat einen Vogel.
7. Die Person, die im mittleren Haus wohnt, trinkt Milch.
8. Die Person, die im gelben Haus wohnt, raucht Dunhill.
9. Die Norwegerin lebt im ersten Haus.
10. Die Person, die Marlboro raucht, wohnt neben der Person mit der Katze.
11. Die Person mit dem Pferd lebt neben der Person, die Dunhill raucht.
12. Die Person, die Winfield raucht, trinkt gern Bier.
13. Die Norwegerin wohnt neben dem blauen Haus.
14. Der Deutsche raucht Rothmanns.
15. Die Person, die Marlboro raucht, lebt neben der Person, die Wasser trinkt.