Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 2

Ausgabe: 27.10.16
Abgabe: 03.11.16

Aufgabe 2.1 *Modellierung mit Mengen* $(3+4+9+6+6=28$ Punkte)

Derzeit sieht man in Frankfurt viele Menschen orientierungslos durch die Gegend laufen, während sie auf ihr Smartphone starren. Diese Menschen spielen *Pokémon Yalla*. In dem Spiel versucht jeder Spieler, von allen Pokémon-Arten ein Exemplar zu fangen und es durch Kämpfe zu trainieren.

Wir wollen einige Aspekte von Pokémon Yalla mit Mengen (bzw. Wertebereichen) modellieren. Sie können die Menge $\mathbb{N}$ sowie die Menge **PA** aller im Spiel vorkommenden *Pokémon-Arten* (z. B. Pikachu, Nidoran, Tauros, etc.) als gegeben voraussetzen.

a) Mithilfe der GPS-Funktion ihres Smartphones können die Spieler 100 Kampf-Arenen und 4747 kleine Geschäfte, die sogenannten Pokéstops, in Pokémon Yalla finden. Gegeben seien **A** als die Menge aller Arenen und **PS** als die Menge aller Pokéstops. Sowohl Arenen als auch Pokéstops werden durch ihre geographischen Koordinaten beschrieben.

   Definieren Sie die Menge **APS** aller Arenen, in denen sich ebenfalls ein Pokéstop befindet.

b) Ein *Pokémon-Exemplar* ist spezifiziert durch seine Pokémon-Art sowie seinen *Level*. Der Level eines Pokémons kann die Werte 1 bis 99 annehmen.
   i) Definieren Sie die Menge **PE** aller möglichen Pokémon-Exemplare.
   ii) Welches Element von **PE** steht für ein Pikachu mit Level 37?

c) Jede Pokémon-Art besitzt außerdem *mindestens* einen *Typen*. Es gibt beispielsweise die Typen *Elektro*, *Gift* und *Normal*. Gegeben sei die Menge **T** aller im Spiel vorkommenden Typen und die Relation $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{PA} \times \mathbf{T}$, die jeder Pokémon-Art ihre Typen zuordnet.
   i) Welches Element von **R** besagt, dass der Art Pikachu der Typ Elektro zugeordnet ist?
   ii) Definieren Sie die Menge **PA-Elektro** aller Pokémon-Arten des Typs Elektro.
   iii) Definieren Sie die Menge **U** aller Pokémon-Arten, die genau einen Typ haben.

d) Der *Spielerzustand* eines Pokémon-Trainers wird bestimmt durch die Menge der mitgeführten Pokémon-Exemplare, die Anzahl mitgeführter Pokébälle und die Anzahl der Pokédollar im Pokémonnaie. Es können höchstens sechs Pokémon-Exemplare mitgenommen werden, aber kein Exemplar mehrfach; z. B. dürfen nicht zwei Pikachus desselben Levels mitgenommen werden.
   i) Definieren Sie die Menge **SZ** aller möglichen Spielerzustände.
   ii) Welches Element von **SZ** besagt, dass ein Trainer ein Nidoran mit Level 12, ein Pikachu mit Level 7 und ein Tauros mit Level 8, vier Pokébälle und 971 Pokédollar bei sich trägt?

e) Besiegt ein Trainer einen Gegner in einem Arena-Kampf, so erhält er als Belohnung eine bestimmte Anzahl an Pokédollar und Pokébällen. Die jeweilige Anzahl hängt vom eigenen und vom gegnerischen Spielerzustand sowie von der Arena ab, in welcher der Kampf stattfindet.

   Um diesen Zusammenhang durch eine Funktion $\mathbf{belohnung} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ zu modellieren, definieren Sie die Mengen **D** und **B**. Die Funktion **belohnung** gibt also an, wie viele Pokédollar und wie viele Pokébälle der Spieler gewinnt.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.2 *Rechnen mit Mengen und Potenzmengen* (12 + 10 = 22 Punkte)

a) Gegeben seien die Menge $M = \{3, 14, 15, 16, 25\}$, die Menge $U := \{2x+1 : x \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ aller ungeraden natürlichen Zahlen und die Menge $Q := \{x^2 : x \in \mathbb{N}_{>0}\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ aller positiven Quadratzahlen.
Geben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler (bzw. expliziter) Form an. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

i) $(Q \setminus U) \times \emptyset$ ii) $\bigcap_{i=1}^{3} M^i$ iii) $\{x \in \mathcal{P}(M \cap U) : |x| = 2\}$

iv) $\mathcal{P}(U \cap M \cap Q)$ v) $\big(M \times \{25\}\big) \cup \big(\{25\} \times M\big)$ vi) $\bigcup_{i=1}^{2} \big\{(2i-1, 3i+1)\big\} \setminus U^2$

b) Seien A und B zwei Mengen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antworten bzw. geben Sie Gegenbeispiele an.

i) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ii) Aus $A \subseteq B$ folgt $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Aufgabe 2.3 *Worte und Sprachen* (4 + 12 + 10 = 26 Punkte)

a) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Wie viele Worte sind jeweils in den folgenden Sprachen enthalten?

i) $L_1 = \Sigma^4$ ii) $L_2 = \Sigma^3 \cdot \Sigma^4$

iii) $L_3 = \bigcup_{i=0}^{3} \{a, b, c\}^i$ iv) $L_4 = (\{aa\} \cup \{a\}^2)^{20}$

b) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Wir bezeichnen eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ als *präfixfrei*, wenn für alle $w \in L$ und alle $x \in \Sigma^+$ die Aussage $wx \notin L$ gilt.

Welche der folgenden Sprachen sind präfixfrei, welche nicht? Geben Sie für jede nicht präfixfreie Sprache ein Gegenbeispiel an. Die Präfixfreiheit müssen Sie nicht beweisen.

i) $L_1 = \Sigma^+$ ii) $L_2 = \{a^p : p \text{ ist eine Primzahl}\}$

iii) $L_3 = \emptyset$ iv) $L_4 = \{a, bb, baa, bab\}$

v) $L_5 = L_4^m$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$ vi) $L_6 = L_4^+$

c) Seien $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma^*$ präfixfreie Sprachen. Beweisen oder widerlegen Sie:

i) $L_1 \cap L_2$ ist präfixfrei. ii) $L_1 \cup L_2$ ist präfixfrei.

Kommentar: Präfixfreiheit ist ein wichtiges Konzept bei Codes. Für zwei endliche Alphabete Σ, Γ können wir eine injektive Funktion $f : \Sigma \to \Gamma^*$ als eine Kodierung der Buchstaben aus Σ auffassen. Um eine Nachricht (oder Datei) $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^n$ zu kodieren, wenden wir f auf jeden Buchstaben w_i einzeln an und konkatenieren die Resultate. Wir erhalten damit eine Funktion $F : \Sigma^* \to \Gamma^*$ mit $w \mapsto f(w_1) \cdots f(w_n)$.

Eine Kodierung ist nur dann brauchbar, wenn sie umkehrbar, d. h. dekodierbar ist: Wir müssen fordern, dass F ebenfalls injektiv ist. Hier kommt die Präfixfreiheit ins Spiel. Wenn $\mathrm{Bild}(f)$ präfixfrei ist, erhalten wir automatisch ein injektives F und damit die Eindeutigkeit der Dekodierung.

Präfixfreie Codes haben noch weitere Vorteile: Wenn man eine kodierte Nachricht von links nach rechts liest, kann man jeden Buchstaben sofort nach dem Lesen dekodieren.

Hier ein kleines Beispiel, was bei einem nicht-präfixfreien Code schiefgehen kann: Wir kodieren die Buchstaben in $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ durch Binärzahlen wie folgt: $a \mapsto 1101$, $b \mapsto 0111$, $c \mapsto 0$, $d \mapsto 011$. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachte die Codewörter $w := 0 \cdot (1101)^m$ und $w' := 011 \cdot (0111)^m = w \cdot 11$. Das erste Wort dekodiert zu ca^m, das zweite zu db^m. Um diesen Unterschied aber festzustellen, muss man mindestens die ersten $4m + 1$ Bits lesen. Man kann den ersten Buchstaben erst dekodieren, nachdem man die gesamte Nachricht gelesen hat.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4 *Eigenschaften von Funktionen* (12 + 3 + 9 = 24 Punkte)

a) Betrachten Sie folgende Funktionen:

i) $f_1 : \{a, b\}^* \to \mathbb{N}$ mit $w \mapsto |w|$

ii) $f_2 : \{a\}^* \to \mathbb{N}$ mit $w \mapsto |w|$

iii) $f_3 : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ mit $x \mapsto x \oplus \mathbb{Z}$

iv) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $n \mapsto \begin{cases} -\frac{n}{2}, & n \text{ ist gerade} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$

Geben Sie für jede der obigen Funktionen f_i an, ob sie injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist. Geben Sie für jede nicht-injektive Funktion f_i zwei Elemente $x, y \in \text{Def}(f_i)$, sodass $x \neq y$ und $f_i(x) = f_i(y)$ gilt. Geben Sie für jede nicht-surjektive Funktion f_i ein Element x aus dem Bildbereich an, sodass $x \notin \text{Bild}(f_i)$ gilt.

Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

b) Wir betrachten erneut die Funktion f_1 aus Teil a). Geben Sie eine Menge P an, sodass das Urbild $f_1^{-1}(P)$ genau 10 Elemente enthält. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

c) Sei $g : A \to B$ eine Funktion und sei $b \in B$ beliebig. Was können Sie über das Urbild $g^{-1}(\{b\})$ folgern, wenn

i) g injektiv ist?

ii) g surjektiv ist?

iii) g bijektiv ist?