Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 3

Ausgabe: 03.11.16
Abgabe: 10.11.16

Aufgabe 3.1 *DisMord im Schloss* (20 + 5 + 5 = 30 Punkte)

An einem verregneten Morgen im August des Jahres 1516 wird der Schlossherr Graf von Modenburg leblos mit tiefen Stichwunden in seinem Schlafgemach aufgefunden. Dem eilig herbeigeeilten Kriminalinspektor ist sofort klar, dass es sich um einen kaltblütigen Mord handeln muss. Da die im Kampf zertrümmerte Taschenuhr des ermordeten Grafen um 19:03 Uhr stehen geblieben ist, kann der Inspektor rekonstruieren, dass der Mord am vorigen Abend gegen 19 Uhr geschehen sein muss. Der Kreis der Verdächtigen lässt sich schnell auf die vier Bediensteten reduzieren, die sich zur Tatzeit auf dem Schlossgelände aufhielten: der Gärtner, die Köchin, der Butler und die Magd.

Noch ist unklar, wer die Tat begangen hat. Oder sind vielleicht sogar mehrere Personen in den Mord verstrickt? Der Inspektor setzt seine Ermittlungen fort und fördert die folgenden Fakten zu Tage:

I. Die Köchin behauptet, sie habe zwischen 18 und 20 Uhr in der Küche das Essen für den kommenden Tag vorbereitet. Währenddessen habe sie mit absoluter Sicherheit den Gärtner beim Schneiden der Rosen im Park vor dem Küchenfenster beobachtet. Falls sie unschuldig ist – und ihre Aussage somit glaubwürdig ist –, muss auch der Gärtner unschuldig sein.

II. Auf dem Flur vor dem Schlafgemach wurden schlammige Fußspuren entdeckt, die nur zum Gärtner oder zur Köchin gehören können. Schlammige Füße holt man sich nämlich nur im Garten oder im Kartoffelkeller! Mindestens eine(r) der beiden muss also am Mord beteiligt gewesen sein.

III. Eine Nachbarin hat aus ihrem Fenster beobachtet, wie um 18:30 Uhr genau zwei Personen den Schlossherren in seinem Schlafgemach aufgesucht haben, und zwar ein Mann und eine Frau. Bei diesen beiden Personen muss es sich um die Täter handeln.

IV. Ein weiterer Zeuge sagt aus, zur Tatzeit genau eine Gestalt im Salon beim Abstauben der Vorhänge und Polieren des Silberbestecks gesehen zu haben. Somit kann diese Person den Mord nicht begangen haben. Da sonst niemand Zugang zum Salon hat, muss es sich bei dieser Person um den Butler oder die Magd handeln. Allerdings behaupten beide, zur fraglichen Zeit im Salon gewesen sein. Eine der beiden Personen lügt also und ist in den Mord verstrickt.

Lösen Sie den Fall!

a) Stellen Sie aussagenlogische Formeln $\varphi_{\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{\mathrm{IV}}$ auf, welche die ermittelten Fakten widerspiegeln. Benutzen Sie die aussagenlogischen Variablen **B** (= „der Butler ist schuldig“), **G** (= „der Gärtner ist schuldig“), **K** (= „die Köchin ist schuldig“) und **M** (= „die Magd ist schuldig“).

b) Konstruieren Sie dann eine Formel φ, die ausdrückt, dass alle vier Fakten gelten.

c) Bestimmen Sie alle erfüllenden Belegungen von φ. Wer kommt als Mörder in Frage?

Erklären Sie, warum $\varphi_{\mathrm{I}}, \dots, \varphi_{\mathrm{IV}}$ die Faktenlage exakt wiedergeben. Überprüfen Sie am Ende, ob Ihre Antwort wirklich plausibel ist. Schließlich wollen Sie wohl kaum Unschuldige verurteilen oder Mörder frei herumlaufen lassen!

Aufgabe 3.2 *Erfüllbarkeit, Tautologien, Widersprüche* (12 + 10 = 22 Punkte)

a) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln φ_i an, ob sie

- allgemeingültig,
- unerfüllbar oder
- sowohl erfüllbar als auch falsifizierbar

ist. Geben Sie für jede Formel, die erfüllbar und falsifizierbar ist, sowohl eine erfüllende als auch eine falsifizierende Belegung an. Andernfalls ist keine Begründung nötig.

i) $\varphi_1 := \mathbf{1} \to \big((X \to Y) \leftrightarrow (\neg Y \to \neg X)\big)$ ii) $\varphi_2 := A \oplus \mathbf{1} \oplus A \oplus B$

iii) $\varphi_3 := \neg\Big((X \to Y) \leftrightarrow \big((X \wedge \neg Y) \to \mathbf{0}\big)\Big)$ iv) $\varphi_4 := \bigwedge_{i=1}^{n} \big(V_i \to V_{2i}\big)$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$

b) Bestimmen Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln ψ_i die Menge aller erfüllenden Belegungen $\mathcal{B}$ mit $\mathrm{Def}(\mathcal{B}) = \mathrm{Var}(\psi_i)$.

i) $\psi_1 := (A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to A)$ ii) $\psi_2 := \bigwedge_{i=1}^{n} \big(\neg V_{i+1} \to \neg V_i\big)$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$

Hinweis: Neben Wahrheitstafeln können Sie natürlich auch die „Rechenregeln“ für die Aussagenlogik (Satz 3.33 im Skript) verwenden.

Aufgabe 3.3 *Semantische Äquivalenz und Folgerung* (15 + 9 = 24 Punkte)

a) Welche der folgenden Aussagen sind für alle Wahlen von $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{AL}$ wahr? Für welche gibt es Gegenbeispiele? Sie dürfen die Äquivalenzen aus Satz 3.33 im Skript verwenden.

i) $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \models (\varphi \to \chi)$ ii) $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \equiv (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$

iii) $((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \models ((\varphi \vee \psi) \to \chi)$ iv) $\neg((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \equiv ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \neg\chi)$

v) $\neg(\varphi \oplus \psi) \equiv (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$

b) Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$. Zeigen Sie: Wenn $\varphi \models \psi$, dann $(\psi \to \chi) \models (\varphi \to \chi)$ f.a. $\chi \in \mathrm{AL}$.

Aufgabe 3.4 *Vollständigkeit* (8 + 8 + 8 = 24 Punkte)

Sei $\mathcal{O} := \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, \oplus\}$ die Menge aller aussagenlogischen *Konstanten* und *Junktoren*. Für jedes $S \subseteq \mathcal{O}$ sei $\mathrm{AL}_S \subseteq \mathrm{AL}$ die Menge aller syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln, in denen – neben Klammern und den Variablen – nur die Konstanten und Junktoren aus S vorkommen. Wir nennen S *vollständig*, falls wir für jedes $\varphi \in \mathrm{AL}$ ein $\varphi' \in \mathrm{AL}_S$ mit $\varphi \equiv \varphi'$ finden können.

Beispielsweise ist $S = \{\neg, \vee, \wedge\}$ vollständig[1]. Um die Vollständigkeit einer Teilmenge $R \subseteq \mathcal{O}$ nachzuweisen, müssen also nur die Junktoren $\neg, \vee$ und $\wedge$ mithilfe der Konstanten und Junktoren in R ausgedrückt werden.

Zeigen Sie:

a) $T = \{\mathbf{0}, \to\}$ ist vollständig.

Hinweis: Wie können Sie die Negation $\neg\varphi$ ausdrücken?

b) $U = \{\mathbf{1}, \oplus\}$ ist nicht vollständig.

Hinweis: Wie sehen Formeln aus AL_U aus? Benutzen Sie Assoziativität und Kommutativität für $\oplus$.

c) Finden Sie eine möglichst kleine Obermenge $\widetilde{U} \supseteq U$, sodass $\widetilde{U}$ vollständig ist, und weisen Sie die Vollständigkeit nach.

[1] Den Beweis dafür liefert bereits Satz 3.33 aus dem Skript. In Teil (h) wird gezeigt, wie die beiden Konstanten **1** und **0** durch $\neg, \vee, \wedge$ ausgedrückt werden können und in Teil (k) bzw. (l) dasselbe für die Implikation, Biimplikation und XOR.