Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 4

Ausgabe: 10.11.16
Abgabe: 17.11.16

Die mit $*$ markierten Teilaufgaben sind Bonusaufgaben, in denen Sie Extrapunkte erwerben können. Extrapunkte sind mittels * gekennzeichnet. *Zur Erinnerung:* ***Alle Antworten sind zu begründen****, außer der Aufgabentext erlaubt, dass eine Begründung entfallen darf.*

Aufgabe 4.1 *Das n-Damen-Problem* $(5 + (4{\times}5) + 5 = 30$ Punkte)

Das n-Damen-Problem ist wie folgt definiert: Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sollen n Damen auf einem $n{\times}n$-Schachbrett so platziert werden, dass sie sich nicht gegenseitig *bedrohen*. Eine solche Platzierung bezeichnen wir als *Lösung* des n-Damen-Problems.

Zur Erinnerung: Eine Dame darf beliebig viele Felder in horizontaler, vertikaler und diagonaler Richtung ziehen. Damit sich zwei Damen nicht gegenseitig bedrohen, dürfen sie also nicht in derselben Zeile, nicht in derselben Spalte und nicht auf derselben Diagonalen platziert werden.

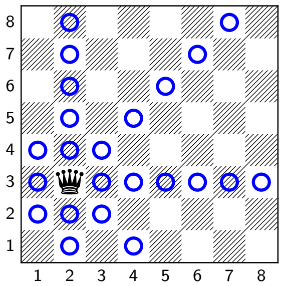


Abbildung 1: Ein 8×8-Schachbrett. Die Dame auf $(3, 2)$ bedroht alle blau markierten Felder. Dort darf keine andere Dame stehen.

a) Besitzt das n-Damen-Problem für $n = 3$ bzw. $n = 4$ eine Lösung?

b) Modellieren Sie das n-Damen-Problem durch aussagenlogische Formeln. Verwenden Sie im Folgenden für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die aussagenlogische Variable $D_{i,j}$ mit der Bedeutung „auf dem Feld (i, j) in Zeile i und Spalte j steht eine Dame“. Die Teilaufgaben i) bis iv) bauen nicht aufeinander auf. Geben Sie jeweils auch eine kurze Erläuterung für Ihre Formeln an.

   i) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{zeile}_{i,j}$, die aussagt: „Wenn eine Dame auf dem Feld (i, j) steht, darf in der i-ten Zeile keine weitere Dame stehen“.

   ii) Stellen Sie eine entsprechende Formel $\mathsf{spalte}_{i,j}$ für das Feld (i, j) und die j-te Spalte auf.

   iii) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{diagonalen}_{i,j}$, die das gleiche für die beiden Diagonalen des Feldes (i, j) aussagt.

   iv) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{mindestens}$, die aussagt, dass in jeder Zeile mindestens eine Dame steht.

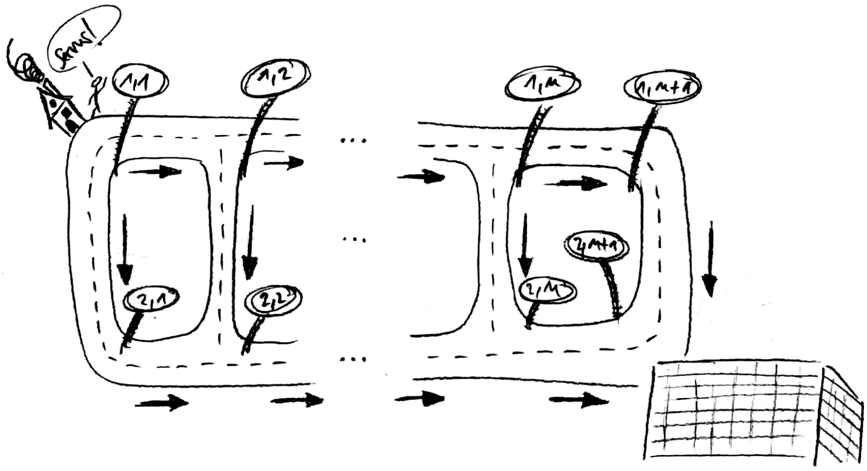
   Hinweis: Zusammen mit den Formeln aus i), ii) und iii) folgt, dass genau n Damen auf dem Schachbrett stehen.

c) Geben Sie eine Formel φ_n an, sodass die erfüllenden Belegungen von φ_n genau den Lösungen des n-Damen-Problems entsprechen.

Aufgabe 4.2 *Black Friday: Modellierung mit DNF* ($5 + 15 + 10^* + 5^*$ Punkte)

Am 25. November findet der diesjährige *Black Friday*[1] statt. Auch Ivan möchte an der Schnäppchenjagd teilnehmen. Dazu muss er aber zuerst das Einkaufszentrum erreichen, das sich leider am anderen Ende der Stadt befindet.

Das Straßennetz besteht aus einer Menge von Kreuzungen $\mathcal{K} := \{1,2\} \times \{1,2,\ldots,n{+}1\}$. Zwischen je zwei Kreuzungen $(1,b),(2,b) \in \mathcal{K}$ verläuft eine (vertikale) Straße, zwischen je zwei Kreuzungen $(a,b),(a,b{+}1) \in \mathcal{K}$ verläuft eine (horizontale) Straße. Ivan wohnt an Kreuzung $(1,1)$, der Eingang zum Einkaufszentrum befindet sich an Kreuzung $(2,n{+}1)$. Alle Straßen sind Einbahnstraßen: Sie können nur von oben nach unten bzw. von links nach rechts befahren werden.



Leider sind einige der horizontalen Straßenabschnitte aufgrund von Bauarbeiten voll gesperrt und damit nicht befahrbar. Mit seinem Navi möchte Ivan herausfinden, ob er trotzdem das Einkaufszentrum erreichen kann. Das Navi verwendet die aussagenlogischen Variablen $Q_1,\ldots,Q_n,R_1,\ldots,R_n$, wobei Variable Q_i ausdrückt, dass der Straßenabschnitt zwischen den Kreuzungen $(1,i)$ und $(1,i{+}1)$ weiterhin befahrbar ist, und R_i ausdrückt, dass der Straßenabschnitt zwischen $(2,i)$ und $(2,i{+}1)$ weiterhin befahrbar ist.

a) Sei $n = 2$. Bestimmen Sie eine Formel φ_2 in DNF, die ausdrückt, dass Ivan das Einkaufszentrum trotz der Baustellen erreichen kann.
Beschreiben Sie zuerst Ihre **Idee** bzw. skizzieren Sie Ihren Lösungsweg.

b) Bestimmen Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Formel φ_n in DNF, die ausdrückt, dass Ivan das Einkaufszentrum trotz der Baustellen erreichen kann.
Beschreiben Sie zuerst Ihre **Idee** bzw. skizzieren Sie Ihren Lösungsweg.

Hinweis: Wie sehen Primimplikanten von φ_n aus?

c∗) Bestimmen Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Formel ψ_n in DNF, die ausdrückt, dass Ivan das Einkaufszentrum **nicht** erreichen kann.
Beschreiben Sie zuerst Ihre **Idee** bzw. skizzieren Sie Ihren Lösungsweg.

Hinweis: Wie viele Baustellen reichen aus, um alle möglichen Wege zu versperren? Welche Möglichkeiten gibt es, diese „Worst-Case"-Baustellen zu platzieren?

d∗) Welche Primimplikanten besitzt ψ_n?

Hinweis: Sie können die Lösung aus Teil b) in Teil c∗) <u>nicht</u> gewinnbringend einbringen. Sie benötigen für beide Aufgabenteile unterschiedliche Ideen!

Bitte wenden!

[1] siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Black_Friday`

Aufgabe 4.3 *Syntax und Semantik von DNFs und KNFs* $(8 + 9 + 8 = 25$ Punkte$)$

a) Entscheiden Sie für jede der folgenden Formeln φ_i, ob sie in DNF und/oder in KNF vorliegt.

- $\varphi_1 = \neg V_1 \wedge (V_2 \vee V_3)$
- $\varphi_2 = V_1 \wedge V_2$
- $\varphi_3 = (V_2 \wedge V_3) \vee \neg\neg V_1$
- $\varphi_4 = \neg(V_1 \wedge V_3) \vee (V_3 \wedge \neg V_4)$

b) Bestimmen Sie eine KNF für $\varphi = (V_1 \oplus V_2) \wedge (V_2 \oplus V_3)$.

c) Entscheiden Sie für die beiden folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind und erläutern Sie Ihre Antworten.

i) Sei ψ in DNF und ψ' ein Konjunktionsterm von ψ. Dann gilt $\psi \models \psi'$.
ii) Sei χ in KNF und χ' ein Disjunktionsterm von χ. Dann gilt $\chi \models \chi'$.

Aufgabe 4.4 *Implikanten, Primimplikanten und kurze DNFs* $((3{+}9{+}3) + (10{+}10^*)$ Punkte$)$

a) Sei ψ eine Formel mit $\mathrm{Var}(\psi) = \{X_1, X_2, X_3\}$, für die gelte:

$$[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 1 \iff \mathcal{B}(X_1) + \mathcal{B}(X_2) + \mathcal{B}(X_3) \geq 2$$

i) Bestimmen Sie die kanonische DNF für ψ.
ii) Weisen Sie nach, dass
   - $(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$ ein Implikant von ψ ist,
   - X_2 *kein* Implikant von ψ ist,
   - $(X_1 \wedge X_2)$ ein Primimplikant von ψ ist.

iii) Bestimmen Sie alle Primimplikanten von ψ und finden Sie eine möglichst kurze DNF für ψ, d.h. eine DNF mit möglichst wenigen Konjunktionstermen.

b) Betrachten Sie die Formel

$$\eta = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

i) Bestimmen Sie alle Primimplikanten von η.
ii$*$) Bestimmen Sie eine **minimale** DNF für η, d.h. eine DNF mit möglichst wenigen Konjunktionstermen.