Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 5

Ausgabe: 17.11.16
Abgabe: 24.11.16

Aufgabe 5.1 *Implikationen, Existenz- und Allaussagen* $((6{+}5) + (5{\times}3) = 26$ Punkte)

a) Auf dem Tisch liegen die folgenden fünf Karten, welche jeweils auf einer Seite mit einem Buchstaben und auf der anderen Seite mit einer natürlichen Zahl beschriftet sind.

$\boxed{\text{D}}$ $\boxed{9}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{A}}$

Wir wollen testen, ob die folgende **Behauptung** wahr ist:
Für jede Karte gilt: Steht auf der einen Seite eine ungerade Zahl, dann steht auf der anderen Seite ein Vokal.

Natürlich können wir alle fünf Karten umdrehen, um den Wahrheitsgehalt der Behauptung zu überprüfen, aber es geht auch einfacher.

i) Welche Karten *müssen* wir umdrehen, um die Behauptung zu verifizieren?
ii) Finden Sie den Fehler im folgenden Argument:
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann steht auf der Rückseite der Karte mit der 9 kein Vokal.

b) Wir betrachten Färbungen $f : \mathbb{N} \to \{\text{blau}, \text{rot}\}$ der natürlichen Zahlen. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle Färbungen $f : \mathbb{N} \to \{\text{blau}, \text{rot}\}$ mit folgender Eigenschaft?

Für jede blau gefärbte Zahl gibt es eine ***kleinere*** *rot gefärbte Zahl.*

Begründungen sind nicht erforderlich.

i) Es gilt $f(0) = \text{blau}$.
ii) Es gibt eine rot gefärbte natürliche Zahl.
iii) Für jede blau gefärbte natürliche Zahl gibt es eine größere blau gefärbte Zahl.
iv) $f^{-1}(\{\text{rot}\}) = \{x \in \mathbb{N} : f(x) = \text{rot}\}$ ist endlich.
v) Wenn $f(1) = \text{rot}$ gilt, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) = \text{rot}$ und $f(n{+}1) = \text{blau}$ gilt.

Aufgabe 5.2 *Summen irrationaler Zahlen* (20 Punkte)

Seien a, b, c irrationale Zahlen, d. h. es gelte $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

Mindestens eine der drei Zahlen $a + b$, $b + c$ oder $c + a$ ist irrational.

Hinweis: Beweis durch Kontraposition oder Beweis durch Widerspruch (indirekter Beweis)

Aufgabe 5.3 *Resolution* $(12 + 12 = 24$ Punkte)

Leiten Sie den leeren Disjunktionsterm ϵ mittels Resolution aus den Mengen K_1 bzw. K_2 her.

a) $K_1 := \big\{\{Q, R\}, \{\neg Q, R, \neg T\}, \{\neg Q, \neg R, \neg T\}, \{T\}, \{Q, \neg R\}\big\}$

b) $K_2 := \big\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{\neg B, C\}, \{\neg A, \neg C\}, \{\neg B, \neg C\}\big\}$

Bitte wenden!

Aufgabe 5.4 *Minesweeper* ((6+12) + 4 + 8 = 30 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Das Spiel *Minesweeper* wird auf einem Spielfeld $F_{m,n} := \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots n\}$ mit m Zeilen und n Spalten gespielt. Jede Zelle $(i, j) \in F_{m,n}$ enthält entweder genau eine *Mine* oder ist *frei*. Für eine Zelle $(i, j) \in F_{m,n}$ bezeichnen wir alle horizontal, vertikal oder diagonal angrenzenden Zellen als *Nachbarn* von (i, j). Sei $N(i, j) := F_{m,n} \cap \Big(\big(\{i-1, i, i+1\} \times \{j-1, j, j+1\}\big) \setminus \{(i, j)\} \Big)$ die Menge aller Nachbarn von (i, j).

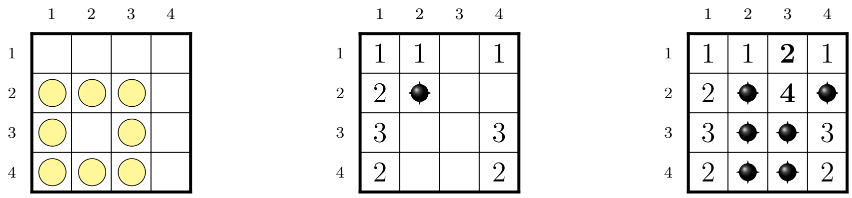
Zu Beginn des Spiels ist nicht bekannt, welche der Zellen Minen enthalten. Um dies herausfinden, erhält der Spieler Hinweise:

Eine Teilmenge $\textsc{Hints} \subseteq F_{m,n}$ der Zellen wird bekanntgegeben („aufgedeckt"), in denen jeweils eine Zahl aus der Menge $\{0, 1 \ldots, 8\}$ steht: Wenn in einer Zelle (i, j) die Zahl z steht, dann

- ist die Zelle (i, j) frei und
- es befinden sich auf den Nachbarzellen von (i, j) **genau** z Minen.

Mithilfe dieser Hinweise muss der Spieler herausfinden, welche der Zellen Minen enthalten, und welche nicht. Ziel des Spiels ist es, alle freien Zellen „aufzudecken", ohne dabei eine Mine zu erwischen.

Hier können Sie Minesweeper spielen: `http://minesweeperonline.com/`



(a) $N(3, 2)$ **(b)** teilweise gelöst **(c)** vollständig gelöst

Abbildung 1: Ein 4×4-Minesweeper-Spielfeld, links die Menge $N(3, 2)$ aller Nachbarzellen von $(3, 2)$, Mitte teilweise gelöst, rechts vollständig gelöst: Die Beschriftung der Zelle $(2, 1)$ in der zweiten Zeile und ersten Spalte sagt aus, dass genau zwei seiner Nachbarzellen Minen enthalten. Hierfür kommen nur die Zellen $(2, 2)$ und $(3, 2)$ in Frage. Die Zelle $(1, 3)$ muss allerdings frei sein. Wieso?

Wir wollen das Spiel mithilfe von Aussagenlogik modellieren. Verwenden Sie im Folgenden die aussagenlogischen Variablen $X_{i,j}$ mit der Bedeutung „die Zelle $(i, j) \in F_{m,n}$ enthält eine Mine".

a) Sei $(i, j) \in \textsc{Hints}$.

   i) Entwerfen Sie eine Formel $\varphi^{(0)}_{i,j}$, die aussagt, dass (i, j) und alle Nachbarn von (i, j) frei sind.

   ii) Entwerfen Sie eine Formel $\varphi^{(1)}_{i,j}$, die aussagt, dass (i, j) frei ist und genau eine Nachbarzelle eine Mine enthält.

   Hinweis: Eine Notation wie „$\bigwedge_{\cdots \in N(i,j)} \ldots$" oder „$\bigvee_{\cdots \in N(i,j)} \ldots$" könnte nützlich sein.

b) Angenommen, für alle Zellen $(i, j) \in \textsc{Hints}$ ist (i, j) frei, genau $z_{i,j}$ viele der Nachbarn enthalten eine Mine und die Formel $\varphi^{(z_{i,j})}_{i,j}$ drückt dies jeweils aus.

   Geben Sie eine Formel ψ an, die all diese Bedingungen wiedergibt.

c) Sei $(i, j) \in F_{m,n}$ beliebig. Wann kann (i, j) gefahrlos aufgedeckt werden? Geben Sie eine Formel ξ an, die genau dann **unerfüllbar** ist, wenn (i, j) gefahrlos aufgedeckt werden kann.

   Kommentar: Wozu ist das gut? Wir können ξ in eine Menge von Disjunktionstermen umwandeln und dann mit Resolution auf Unerfüllbarkeit überprüfen.