Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

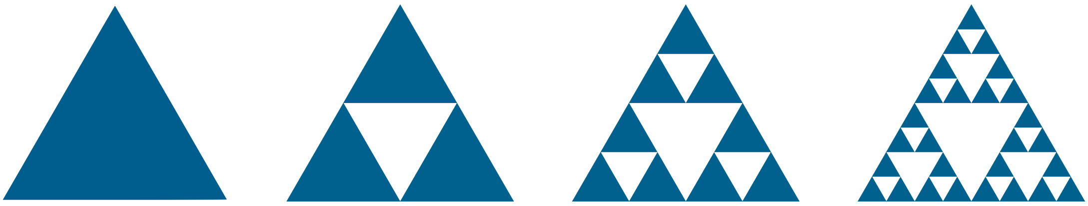
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 6

Ausgabe: 24.11.16
Abgabe: 01.12.16

Aufgabe 6.1 *Fraktale* $((6+6+2)+12+(4^*+6^*) = 26+10^*$ Punkte)

a) Für die Folge $T_0, T_1, \ldots$ der Sierpinski-Dreiecke sind in Abbildung 1 die ersten vier Folgenglieder dargestellt. Beginnend bei einem gleichseitigen Dreieck T_0 mit dem Flächeninhalt A, entsteht T_1 aus T_0, indem T_0 wie abgebildet in vier gleichseitige Dreiecke mit identischem Flächeninhalt zerlegt und das mittlere Dreieck „gelöscht“ wird (dargestellt durch eine weiße Fläche). Für die drei übrigen Dreiecke (oben, links unten und rechts unten) wird dieser Prozess rekursiv wiederholt.



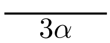
(a) T_0 **(b)** T_1 **(c)** T_2 **(d)** T_3

Abbildung 1: Die Sierpinski-Dreiecke T_0, T_1, T_2 und T_3. Die weißen Dreiecke wurden gelöscht.

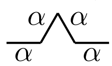
Sei A_n die Fläche des n-ten Sierpinski-Dreiecks T_n – die weißen Dreiecke gehen also nicht in die Fläche ein.

i) Stellen Sie eine Rekursionsgleichung für A_n auf.
ii) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$ gilt.
iii) Was passiert im Grenzwert für $n \to \infty$? Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

b) Die Folge $S_0, S_1, \ldots$ der Kochschen Schneeflocken ist in Abbildung 2 dargestellt. Beginnend mit einem gleichseitigen Dreieck S_0 mit der Seitenlänge a, entsteht S_{n+1} aus S_n, indem jede Seite von S_n durch vier Seiten mit je einem Drittel ihrer Länge ersetzt wird, mit folgender Form:



wird zu



Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Umfang U_n der Kochschen Schneeflocke S_n. Eine kurze Begründung ist ausreichend.

(a) S_0 **(b)** S_1 **(c)** S_2 **(d)** S_3

Abbildung 2: Die Kochschen Schneeflocken S_0, S_1, S_2 und S_3

Kommentar: Für $n \to \infty$ erhalten wir auf diese Weise eine Schneeflocke mit endlicher Fläche (sie passt vollständig in Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$), aber unbeschränktem Umfang.

c*) Wir definieren die Folge $C_0, C_1, \ldots$ von Mengen: Wir beginnen mit dem reellen Intervall $C_0 = [0,1]$ und erhalten $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, indem wir das mittlere Drittel entfernen. Auf den beiden anderen Intervallen setzen wir diesen Prozess rekursiv fort und entfernen in jedem Schritt jeweils das mittlere Drittel (siehe Abbildung 3). Den Schnitt aller Folgenglieder bezeichnen wir als die Cantor-Menge.

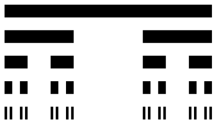


Abbildung 3: $C_0, C_1, \ldots, C_4$

i) Bestimmen Sie die Länge der maximalen Intervalle in C_n. Wie viele solcher Intervalle gibt es in C_n?

ii) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ überabzählbar ist.

Aufgabe 6.2 *Fliesenleger* (8 + 5 + 12 = 25 Punkte)

Gegeben sei ein quadratisches $2^n \times 2^n$-Schachbrett mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir fragen uns, ob wir alle Felder mit *L-Kacheln* auslegen können. Dabei überdeckt jede L-Kachel genau drei Felder, hat die Form wie links in Abbildung 4 dargestellt und darf rotiert werden. In einer Kachelung dürfen sich keine L-Kacheln überlappen.

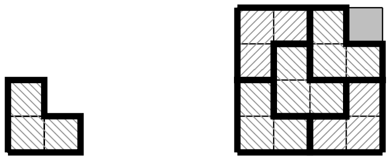


Abbildung 4: Links: Eine L-Kachel. Rechts: Beispielkachelung eines $2^2 \times 2^2$-Schachbretts mit fehlender Ecke oben rechts (grau markiert).

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$: Ein $2^n \times 2^n$-Schachbrett besitzt **keine** Kachelung.

Hinweis: Beweis durch Widerspruch

b) Entfernen Sie ein beliebiges Feld aus einem $2^3 \times 2^3$-Schachbrett und skizzieren Sie eine Kachelung wie in Abbildung 4.

c) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$: Eine Kachelung ist für jedes $2^n \times 2^n$-Schachbrett möglich, bei dem genau ein Feld entfernt wurde.

Hinweis: Vollständige Induktion nach n. Wie sieht die Induktionsannahme aus?

Aufgabe 6.3 *Rekursionsgleichungen verstehen und lösen* (6 + 6 + 6 + 6 = 24 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen auf, d. h. finden Sie jeweils einen (möglichst einfachen) geschlossenen Ausdruck für a_n und geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

Beispiel. Es gelte $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := a_n + 1$ f.a. $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann lautet die *Lösung* der Rekursionsgleichung:

$$a_n = n$$

Begründung: $a_n = a_{n-1} + 1 = a_{n-2} + 1 + 1 = \cdots = a_{n-(n-1)} \underbrace{+1 + 1 + \cdots + 1}_{(n-1)\text{-mal}} = \underbrace{a_1}_{=1} + n - 1 = n$

a) $a_1 := 1,\ a_{n+1} := 3 - a_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

b) $a_0 := 0,\ a_{n+1} := a_n + n + 1$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

c) $a_1 := 1,\ a_{n+1} := a_n \cdot \frac{n}{n+1}$ f.a. $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

d) $a_0 := 1,\ a_{n+1} := a_n + 2^n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.4 *Vollständige Induktionen* (10 + 15 = 25 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion. Notieren Sie dabei auch jeweils, welche Induktionsnahme Sie treffen und an welcher Stelle sie verwendet wird.

a) Zeigen Sie: $n^3 - n$ ist durch 3 teilbar.

b) Wir betrachten die Python-Funktion `hoch` : $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

```
def hoch(b, n):
    if n == 0:
        return 1
    elif n%2 == 0:  # n ist gerade
        return hoch(b*b, n/2)
    else:
        return b * hoch(b, n-1)
```

Zeigen Sie:

Für alle $b \in \mathbb{N}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$ liefert der Aufruf `hoch(`b`,`n`)` den Rückgabewert b^n.

Kommentar: Für alle $b \in \mathbb{N}_{>0}, n \in \mathbb{N}$ können wir die n-te Potenz von b naiv durch die n-fache Multiplikation von b mit sich selbst berechnen, d.h. durch $b^n = b \cdot b \cdot \ldots \cdot b$. Sehr viel weniger Multiplikationen sind aber ausreichend: Für $n = 2^k$ genügen zur Berechnung von b^n bereits k Quadrierungen, denn es gilt auch $b^n = b^{2^k} = b^{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = (\cdots(b^2)^{2\cdots})^2$. Diesen Umstand macht sich die Funktion `hoch` zunutze.