Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

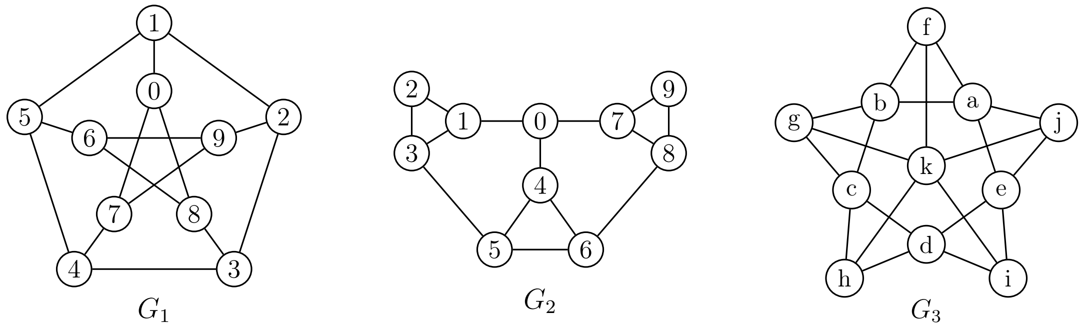
GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 7

Ausgabe: 01.12.16
Abgabe: 08.12.16

Aufgabe 7.1 *Graphprobleme* (10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1, G_2 und G_3:



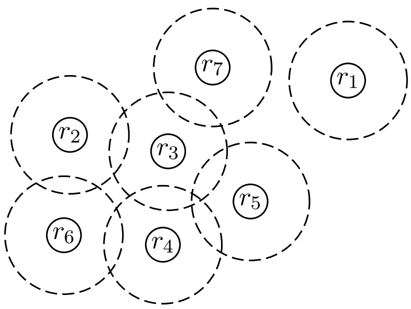
a) Geben Sie für G_2 und G_3 jeweils ein größtmögliches Matching[1] an. Falls es kein perfektes Matching gibt, begründen Sie warum.

b) Geben Sie für G_1 und G_3 jeweils eine konfliktfreie Knotenfärbung mit möglichst wenigen Farben an und bestimmen Sie die chromatische Zahl. (Es ist keine Begründung nötig.)

c) Geben Sie für G_2 und G_3 jeweils einen Hamilton-Kreis an. (Es ist keine Begründung nötig.)

Aufgabe 7.2 *Rundfunk* (4 + 6 + 4 + 6 = 20 Punkte)

Es seien die Radiostationen $r_1, \ldots, r_7$ gegeben, denen jeweils eine Sendefrequenz zugeordnet werden soll. Radiostationen, die zu dicht beieinander liegen, dürfen allerdings nicht die gleiche Frequenz erhalten. Das nebenstehende Diagramm stellt die Lage der einzelnen Radiostationen dar. Um jede Station ist ein gestrichelter Kreis eingezeichnet, der die Reichweite der Radiostation repräsentiert. Schneiden sich die Kreise von zwei Radiostationen r_i und r_j, so dürfen sie nicht die gleiche Frequenz erhalten – sie stehen im Konflikt.



a) Modellieren Sie Radiostationen durch einen Konfliktgraphen $G = (V, E)$.

b) Geben Sie eine konfliktfreie Färbung $f : V \to \mathbb{N}$ für G an, die möglichst wenige verschiedene Farben benutzt, d.h. $|\text{Bild}(f)|$ soll minimal sein.

c) Weisen Sie jeder Radiostation r_i genau eine Frequenz zu, so dass Radiostationen, die zueinander in Konflikt stehen, nicht die gleiche Frequenz erhalten und insgesamt möglichst wenige verschiedene Frequenzen benötigt werden.

d) Erklären Sie, warum weniger Frequenzen nicht ausreichen.

Bitte wenden!

[1] Hier ist nicht die Kardinalität des Matchings, sondern das Matching selbst gefragt.

Aufgabe 7.3 *Robocops vs. Robster* $(20 + 5 + 5 = 30$ Punkte)

Trotz der asimovschen Robotergesetze[2] kommt es zwischen Robotern zu kriminellem Verhalten. Roboterpolizisten (*Robocops*) und Roboterkriminelle (*Robster*) liefern sich ein Katz-und-Maus-Spiel. Zwei Robocops haben zwei Robster festgenommen und müssen sie mit einem kleinen Ruderboot auf die andere Seite eines Flusses bringen, um sie dort dem Robohaftrichter vorzuführen. Dabei stehen die Robocops allerdings vor zwei Problemen:

1. Im Ruderboot ist nur Platz für höchstens zwei Roboter, wobei das Boot nur fahren kann, wenn mindestens ein Roboter rudert. Die Roboter müssen also mehrfach hin- und herfahren.
2. Wird ein Robocop mit zwei Robstern allein gelassen, überwältigen die Robster den Robocop und stehlen seine Bauteile, um noch größere, stärkere und mächtigere Robster zu werden. Diese Situation muss unbedingt vermieden werden.

Abgesehen von Problem 2. befolgen die Robster alle Anweisungen der Robocops zu Flussüberquerungen. Insbesondere unternehmen Robster keine Fluchtversuche und müssen nicht von Robocops bewacht werden.

Um mögliche Flussüberquerungen zu modellieren, führen wir *Zustände* ein: Ein Zustand ist ein Tupel, das die Anzahl der Robocops auf der linken/rechten Seite des Flusses, die Anzahl der Robster auf der linken/rechten Seite des Flusses und die Position des Bootes (links oder rechts) beschreibt. Zu Beginn (im sogenannten *Startzustand*) befinden sich beide Robocops und beide Robster mit dem Ruderboot am linken Ufer. Das Ziel ist es, alle vier Roboter an das rechte Ufer zu bringen (*Endzustand*). Ein Zustand heißt *relevant*, wenn man ihn vom Startzustand aus durch Bootsfahrten erreichen kann und zu keinem Zeitpunkt zwei Robster einen Robocop überwältigen können.

a) Definieren Sie einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$, dessen Knotenmenge V die Menge der **relevanten** Zustände ist. Eine Kante (v, w) soll genau dann in E vorhanden sein, wenn der Übergang vom Zustand v in den Zustand w durch genau eine Bootsfahrt möglich ist.

   Geben Sie eine grafische Darstellung von G an.

b) Geben Sie eine Folge von Bootsfahrten an, mit der alle Roboter das rechte Flussufer erreichen.

c) Wie viele einfache Wege vom Startzustand in den Endzustand existieren in G?

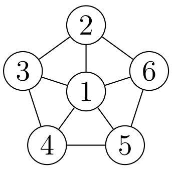
Aufgabe 7.4 *Perfekte Matchings und Gewinnstrategien* $(10 + 10 + 10^*$ Punkte)

Alice und Bob spielen ein Spiel auf einem endlichen, zusammenhängenden und ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Die Spieler wählen abwechselnd Knoten $v_1, v_2, v_3, \ldots$ aus V, so dass $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ ein einfacher Weg ist: $v_1, v_2, v_3, \ldots$ sind paarweise verschieden und es gilt jeweils $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Den ersten Knoten wählt Alice. Der Spieler, der zuletzt einen Knoten wählt, gewinnt.

Wir nennen einen Zug von Spieler S in einer Spielsituation *gewinnbringend* für S, wenn der Gegenspieler nach dem Zug trotz optimalem Spiel nicht gewinnen kann – unter der Annahme, dass S selbst optimal weiterspielt. S hat eine *Gewinnstrategie* genau dann, wenn diese Strategie in jeder Spielsituation, in der es einen gewinnbringenden Zug für S gibt, einen solchen Zug auch vorschreibt.

a) Geben Sie für den folgenden Graphen G^* ein **perfektes** Matching an, d. h. ein Matching, das alle Knoten von G^* überdeckt, und leiten Sie daraus eine Gewinnstrategie für Bob auf G^* ab.

G^*:



b) Angenommen, ein Graph G besitzt ein perfektes Matching.
   Zeigen Sie: Bob hat eine Gewinnstrategie auf G.

c ∗) Angenommen, Bob hat eine Gewinnstrategie auf einem Graphen G. Zeigen Sie, wie sich aus einem beliebigen nicht-perfekten Matching (durch Hinzufügen und/oder Löschen von Matching-Kanten) unter Ausnutzung von Bobs Gewinnstrategie ein größeres Matching konstruieren lässt.

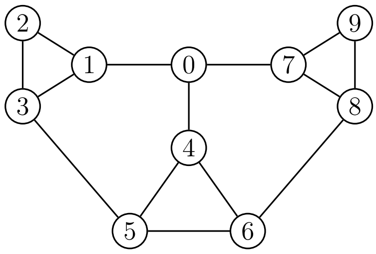
Fazit: Die Aussagen „G besitzt ein perfektes Matching“ und „Bob hat eine Gewinnstrategie auf G“ sind also äquivalent gemäß b) und c ∗).

[2] benannt nach Isaac Asimov, siehe beispielsweise `https://de.wikipedia.org/wiki/Robotergesetze`

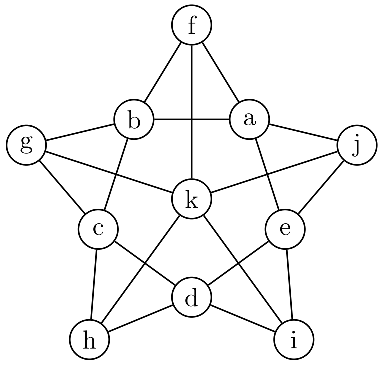
Anhang

Sie können Ihre Lösungen für Aufgabe 7.1 in diese Vorlage zeichnen:

a) Matchings



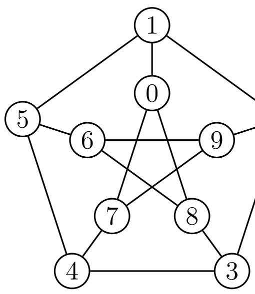
G_2



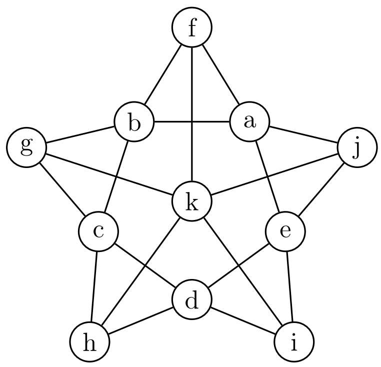
G_3

Begründungen:

b) Knotenfärbungen



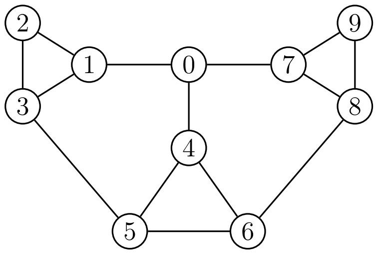
G_1



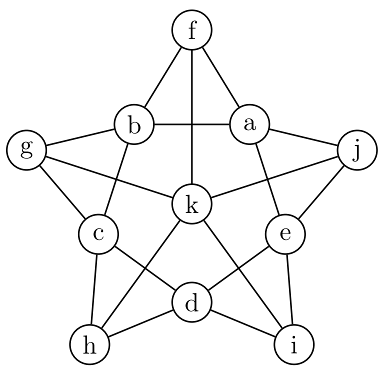
G_3

chromatische Zahlen: $\chi(G_1) =$ _____ **und** $\chi(G_3) =$ _____

c) Hamilton-Kreise



G_2



G_3