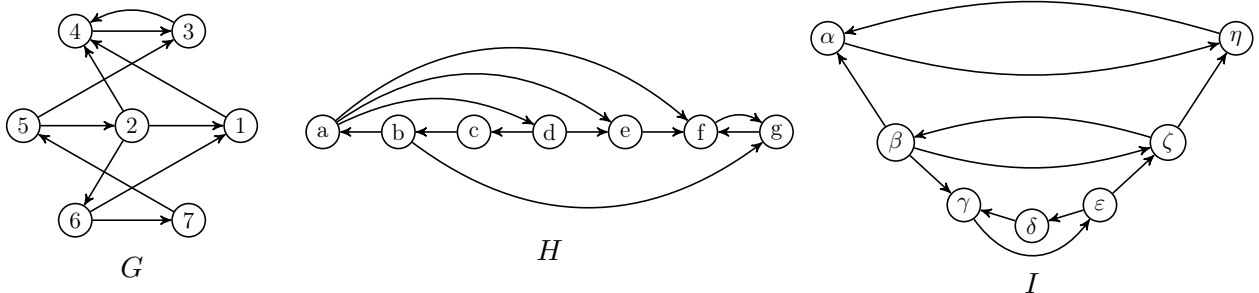


Übungsblatt 8

Ausgabe: 08.12.16
 Abgabe: 15.12.16

Aufgabe 8.1 *Isomorphie, starker Zusammenhang, Planarität* (8 + 10 + 6 = 24 Punkte)

Die Graphen G, H, I seien wie folgt in grafischer Darstellung gegeben.



- Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten von G an.
- Welche der Graphen H und I sind isomorph zu G ? Geben Sie jeweils einen Isomorphismus an oder zeigen Sie, dass kein Isomorphismus existiert.
- Welche der Graphen G, H, I sind planar, welche nicht?

Aufgabe 8.2 *Rekursionsbäume* ((6+12) + (4+4) = 26 Punkte)

- Wir betrachten die Python-Funktion `fibonaiv` : $\mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}$, welche auf naive Weise die n -te Fibonacci-Zahl `fib(n)` (siehe Beispiel 4.19 im Skript) rekursiv berechnet:

```
def fibonaiv(n):
    if n <= 2:
        return 1
    else:
        return ( fibonaiv(n-1) + fibonaiv(n-2) )
```

- Geben Sie den Rekursionsbaum `Baum(5)` für den Aufruf `fibonaiv(5)` in grafischer Darstellung an. Beschriften Sie jeden Knoten, der einem Aufruf `fibonaiv(p)` entspricht, mit dem Parameter p . Ist `Baum(5)` ein Binärbaum? Ist er ein voller Binärbaum? Ist er ein vollständiger Binärbaum?
 - Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ hat `Baum(n)` für den Aufruf `fibonaiv(n)` genau `fib(n)` Blätter.
- Sei die Python-Funktion `hoch` : $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wie in Aufgabe 6.4 gegeben. Seien außerdem $b \in \mathbb{N}_{>0}$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.
 - Bestimmen Sie die Tiefe des Rekursionsbaums `Baum(b, 2k)` für den Aufruf `hoch(b, 2k)`.
 - Bestimmen Sie die Tiefe des Rekursionsbaums `Baum(b, 2k - 1)` für den Aufruf `hoch(b, 2k - 1)`.

Eine informelle Begründung ist ausreichend. Insbesondere ist keine vollständige Induktion gefordert.

Aufgabe 8.3 *Zwei-Färbungen auf Würfeln und Bäumen*

(10 + 15 = 25 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Für jedes $d \in \mathbb{N}_{>0}$ lässt sich der d -dimensionale Würfel $W_d = (V_d, E_d)$ mit zwei Farben konfliktfrei färben.

Zur Erinnerung: $V_d = \{0, 1\}^d$ und

$$E_d = \{\{u, v\} : u, v \in V_d, u \text{ und } v \text{ unterscheiden sich in genau einem Bit}\}$$

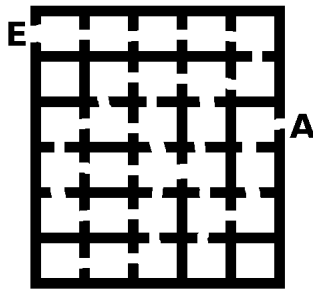
- b) Zeigen Sie per Induktion: Jeder ungerichtete Wald lässt sich mit zwei Farben konfliktfrei färben.

Aufgabe 8.4 *Graphen als Modellierungswerkzeug*

((5 + 3 + 2) + (5 × 3) = 25 Punkte)

Ein kleine Gruppe düsterer Kultisten sucht in den Gewölben einer längst verlassenen Stadt nach alten Büchern. Bei ihrer Suche stoßen sie auf ein altes Labyrinth, das sie durchqueren müssen.

- a) In der folgenden Grafik ist der Grundriss des Labyrinthes abgebildet. Der Eingang und der Ausgang sind durch **E** und **A** markiert:



- i) Modellieren Sie das Labyrinth durch einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Repräsentieren Sie dazu den Eingang **E**, den Ausgang **A** und jeden von **E** erreichbaren Raum durch Knoten in V . Räume mit genau zwei Türen müssen Sie **nicht** berücksichtigen. Zwei Knoten i, j sind genau dann durch eine Kante in E verbunden, wenn man im Labyrinth von Raum i nach Raum j gelangen kann, ohne einen weiteren Raum aus V zu betreten.

- ii) Bestimmen Sie einen Spannbaum T für G .





- iii) Geben Sie einen Weg in T an, der eine Route vom Eingang zum Ausgang beschreibt und durch das Labyrinth führt.

- b) In einem uralten verstaubten Buch finden die Kultisten Hinweise, wie sie den Dämonen Cthulhu erwecken können.

Dazu müssen die folgenden acht Symbole in einem Kreis angeordnet werden:



Runde bzw. *eckige* Symbole werden jeweils durch einen Kreis bzw. ein Quadrat eingerahmt. *Licht-Symbole* sind schwarz auf weißem Hintergrund, während *Schatten-Symbole* weiß auf schwarzem Hintergrund sind. Für die Beschwörung Cthulhus ist die Anordnung der Symbole im Kreis entscheidend. Dabei ist zu beachten, dass manche Symbole im Konflikt stehen und nicht (direkt) nebeneinander angeordnet werden dürfen. Folgende Konflikte gibt es:

- Ein eckiges Licht-Symbol darf nicht neben einem runden Licht-Symbol stehen.
- Schattensymbole mit der gleichen Form (rund bzw. eckig) dürfen nicht nebeneinander stehen.
- Schatten-Symbole dürfen nicht neben Licht-Symbolen stehen, wenn beide rund bzw. beide eckig sind.
- Die Symbole  und  dürfen nicht nebeneinander stehen, ebenso die Symbole  und .

- i) Stellen Sie gemäß den Anweisungen des Buches den Konfliktgraphen auf. Stellen Sie anschließend den Komplementgraphen des Konfliktgraphen auf.

- ii) Gelingt es den Kultisten, Cthulhu zu erwecken?

- iii) In einem anderen Kapitel des Buches steht geschrieben, wie die Entität Yog-Sothoth erweckt werden kann:

Die selben acht Symbole müssen auf drei verschiedene Steintafeln geschrieben werden. Dabei darf jedes Symbol nur auf einer einzigen Tafel stehen und zwei im Konflikt stehende Symbole müssen auf unterschiedliche Tafeln geschrieben werden.

Ist es möglich, Yog-Sothoth zu erwecken?

- iv) Der Legende nach steht jedes der acht Symbole für einen Dämon und jeder Konflikt unter ihnen steht für ein Duell zwischen den beiden, das vor langer Zeit stattgefunden hat. Man sagt, es haben sogar vier Duelle gleichzeitig stattgefunden! Kann diese Legende wahr sein?

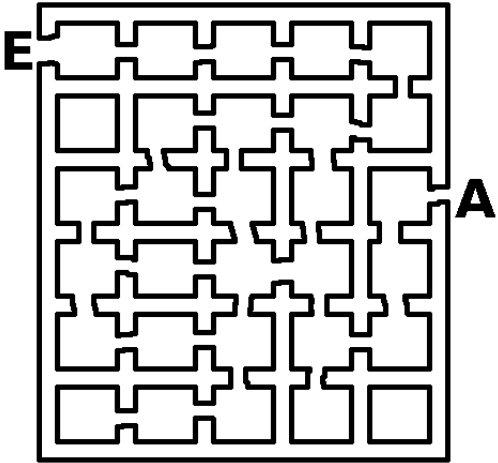
- v) Welche graphentheoretischen Probleme müssen die Kultisten in ii), iii) und iv) lösen?

Anhang

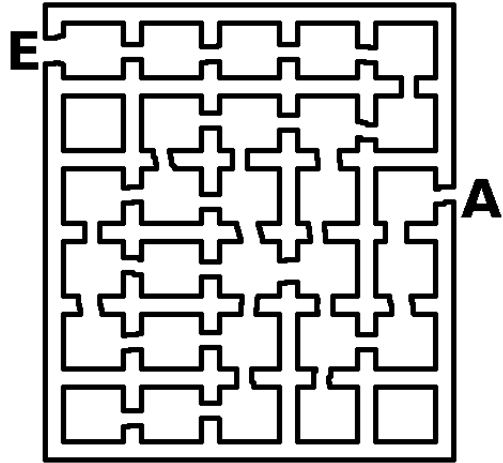
Sie können Ihre Lösungen für Aufgabe 8.4 in diese Vorlage zeichnen:

a)

i)



ii)



iii)

b)



Konfliktgraph

Komplement des Konfliktgraphen

ii)

iii)

iv)

v)