Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 9

Ausgabe: 15.12.16
Abgabe: 22.12.16

In den Aufgaben 9.2 b), 9.3 dürfen und sollten Sie einen Matrizenrechner (z. B. `https://matrixcalc.org/de`) als Hilfsmittel verwenden.

Aufgabe 9.1 *Peer-Review* $(8+9+4+4=25$ Punkte$)$

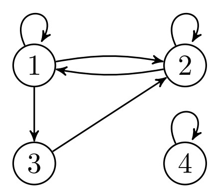
Wir untersuchen des Ansatz des **Peer-Review** für den rechts dargestellten Webgraphen $\textsc{Web}$:

a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $P_d(\textsc{Web})$ für den Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$.

b) Zeigen Sie, dass die Verteilung $\text{PR} := \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ die Page-Rank-Eigenschaft (bzgl. $d = \frac{1}{2}$) besitzt.

Hinweis: Sie müssen kein lineares Gleichungssystem **lösen**, sondern nur überprüfen, ob PR eine Lösung ist.

$\textsc{Web}$:



c) Wie ändern sich die Page-Ranks PR_i der Seiten $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, wenn dem Webgraphen $\textsc{Web}$ ein Link von Webseite 3 auf sich selbst hinzugefügt wird? Welche steigen, welche sinken, welche bleiben gleich? Eine kurze, begründete Antwort genügt, ein Beweis ist nicht erforderlich.

d) Erklären Sie kurz die Bedeutung des Dämpfungsfaktors d für den Zufallssurfer:
Wie bewegt er sich bei $d = 0$ bzw. $d = 1$ durch den Webgraphen?

Aufgabe 9.2 *Zufallssurfer* $(8+9+8=25$ Punkte$)$

Wir betrachten zuerst den Ansatz des **Zufallssurfers** für einen anderen Webgraphen $\textsc{Web}'$:

a) Gegeben sei die Übergangsmatrix einer Webkette $\mathcal{W} = (\vec{K}_3, P_d(\textsc{Web}'))$ durch

$$P_d(\textsc{Web}') := \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

mit dem Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$.

Geben Sie den zugrundeliegenden **Webgraphen** $\textsc{Web}'$ an.

b) Ein Zufallssurfer starte mit Wahrscheinlichkeit 1 in Knoten 1, d.h. für die Anfangsverteilung gelte $\pi^{(0)} = (1, 0, 0)$. Wenn $\pi_v^{(k)}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Zufallssurfer den Knoten v nach k Runden besucht, dann gilt $\pi^{(k)} = \pi^{(k-1)} \cdot P_d(\textsc{Web}')$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$.

i) Berechnen Sie, wo sich der Surfer mit welcher Wahrscheinlichkeit nach einem Schritt und nach zwei Schritten aufhält, d.h. berechnen Sie $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$.

ii) Für welche Matrix P gilt $\pi^{(0)} \cdot P = \pi^{(k)}$?

iii) Berechnen Sie $\pi^{(10)}$ mithilfe eines Matrizenrechners.

c) Zurück zum Ansatz des Peer-Review: Berechnen Sie den Page-Rank-Vektor von $P_d(\textsc{Web}')$, d.h. bestimmen Sie eine Verteilung PR mit der Page-Rank-Eigenschaft.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es.

Kommentar: Später werden wir sehen, dass $PR = PR \cdot P_d(\textsc{Web}')$ gilt, also dass PR ein linker Eigenvektor von $P_d(\textsc{Web}')$ zum Eigenwert 1 ist. Auch der Zusammenhang zwischen den Ansätzen Peer-Review und Zufallssurfer wird klar.

Aufgabe 9.3 *Car-Sharing* (8 + (3+8+3) + 3 = 25 Punkte)

Carla betreibt einen Car-Sharing-Service in Frankfurt am Main mit drei Standorten Bockenheim (B), Hauptbahnhof (H) und Riedberg (R). An diesen drei Verleih-Stationen können Fahrzeuge ausgeliehen und wieder abgegeben werden. Die Auswertung ihrer Kundendaten ergibt die folgende Statistik:

(B) 75% aller in Bockenheim ausgeliehenen Fahrzeuge werden wieder in Bockenheim abgegeben, aber nur ein Sechstel der in Bockenheim ausgeliehen Wagen werden am Hauptbahnhof abgegeben.

(H) Zwei von drei Kunden, die am Hauptbahnhof ein Fahrzeug ausleihen, geben es am Hauptbahnhof oder am Riedberg wieder ab, und zwar fünfmal so häufig am Hauptbahnhof wie am Riedberg.

(R) Leiht ein Kunde ein Fahrzeug am Riedberg aus, so gibt er es in 19 von 36 Fällen dort wieder ab, aber nur einem von 12 Fällen in Bockenheim.

Da alle Autos zwischen 22 Uhr abends und 6 Uhr morgens auf einem Parkplatz an den drei Standorten stehen müssen, überlegt Carla, wie groß diese Parkplätze auf lange Sicht sein sollten.

a) Modellieren Sie Carlas Statistik als Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$, indem Sie eine Irrfahrt eines Fahrzeugs zwischen den Zuständen **B**, **H** und **R** annehmen.

   Geben Sie den Graphen G in grafischer Darstellung an und beschriften Sie jede Kante mit der entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeit. Geben Sie auch die Übergangsmatrix P an.

b) Angenommen, zu Beginn der Irrfahrt befindet sich ein Fahrzeug in Bockenheim mit Wahrscheinlichkeit 1, d. h. die Anfangsverteilung sei $\pi^{(0)} = \left(\pi_B^{(0)}, \pi_H^{(0)}, \pi_R^{(0)}\right) = (1, 0, 0)$.

   i) Berechnen Sie, wo sich das Fahrzeug mit welcher Wahrscheinlichkeit nach 10 Schritten aufhält, d.h. berechnen Sie $\pi^{(10)}$ mithilfe eines Matrizenrechners.

   ii) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

   $$\pi^{(k)} = \left(\tfrac{1}{2}(1 + 2^{-k})\ ,\ \tfrac{1}{3}(1 - 2^{-k})\ ,\ \tfrac{1}{6}(1 - 2^{-k})\right).$$

   Kommentar: Um die volle Punktzahl zu erhalten, genügt es, wenn Sie den Induktionsschritt für $k + 1$ nur für die Wahrscheinlichkeit $\pi_B^{(k+1)}$ führen. (Die Gleichungen für die anderen beiden Wahrscheinlichkeiten können mit einer analogen Rechnung gezeigt werden.) In der Induktionsannahme dürfen Sie verwenden, dass eine entsprechende Aussage auch für $\pi_H^{(k)}$ und $\pi_R^{(k)}$ gilt.

   iii) Mit welcher relativen Häufigkeit befindet sich das Fahrzeug nach einer „unendlich langen“ Irrfahrt in Bockenheim, am Hauptbahnhof bzw. am Riedberg?

c) Angenommen, Carlas Car-Sharing-Service verfügt über 12 Fahrzeuge und ist schon seit über einem Jahr im Geschäft. Wie viele Fahrzeuge parken erwartungsgemäß am Abend auf jedem der drei Parkplätze Bockenheim, Hauptbahnhof und Riedberg?

Bitte wenden!

Aufgabe 9.4 *Alice und Bob im Urlaub* $(10 + 10 + 5 = 25$ Punkte)

Alice und Bob fahren gemeinsam in den Urlaub nach Dismodetien, in ein kleines unbekanntes Land, welches bekannt für seine weißen Sandstrände, seine Museen und seine hochmodernen Wolkenkratzer ist. Da sich beide nicht einigen können, wie ihre Reise ablaufen soll, kommen sie zu der folgenden Vereinbarung: An ungeraden Tagen der Urlaubsreise darf Alice bestimmen, welche Sehenswürdigkeit sie besuchen, an geraden Tagen hat Bob das Sagen.

- Alice bestimmt, dass jeder ungerade (also der erste, dritte, fünfte,...) Tag am Strand verbracht werden muss, unabhängig davon, wo beide am Vortag waren.
- Bob hingegen ist kulturell interessiert: Wenn beide am Vortag am Strand waren, dann stimmt er nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ für einen weiteren Strand-Tag und mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit p für die Besichtigung eines Museums bzw. eines hochmodernen Wolkenkratzers. Wenn beide am Vortag im Museum waren, wählt er nun auf jeden Fall einen Wolkenkratzer und umgekehrt.

a) Modellieren Sie das Urlaubsverhalten von Alice und Bob zunächst unabhängig voneinander durch zwei Markov-Ketten $\mathcal{M}_A = (G_A, P_A)$ und $\mathcal{M}_B = (G_B, P_B)$, d. h. $\mathcal{M}_A$ und $\mathcal{M}_B$ beschreiben, wie ein Urlaub ablaufen würde, wenn nur Alice bzw. nur Bob das Sagen hätte. Gehen Sie davon aus, dass Alice jeden Tag am Strand verbringen möchte.

Verwenden Sie hierfür jeweils die Zustände **M** (wie Museum), **S** (wie Strand) und **W** (wie Wolkenkratzer).

b) Berücksichtigen Sie nun die Vereinbarung, dass Alice und Bob abwechselnd ihre Urlaubstage gestalten. Modellieren Sie dies durch eine Markov-Kette $\mathcal{M}_{AB} = (G_{AB}, P_{AB})$, wobei die Zustände **M**, **S** und **W** für die Urlaubsaktivitäten an geraden Tagen (also am nullten, zweiten, vierten Tag usw.) stehen.

c) Angenommen, $\mathcal{M}_1 = (G_1, P_1)$ und $\mathcal{M}_2 = (G_2, P_2)$ sind zwei Markov-Ketten auf einer gemeinsamen Menge $V = \{1, \ldots, n\}$ von Zuständen. Geben Sie die Übergangsmatrix P einer Kette $\mathcal{M} = (G, P)$ an, sodass P_{ij} die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Zufallssurfer in zwei Schritten von i nach j gelangt, wobei der erste Schritt gemäß $\mathcal{M}_1$ und der zweite Schritt gemäß $\mathcal{M}_2$ erfolgt.