Diskrete Modellierung

Wintersemester 2016/2017

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übung 10

Ausgabe: 22.12.16
Abgabe: 12.01.17

Sie dürfen einen Matrizenrechner als Hilfsmittel verwenden. (z. B. `https://matrixcalc.org/de`)

Aufgabe 10.1. *Irreduzibilität und Aperiodizität* (12 + 15 = 27 Punkte)

a) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1, G_2 und G_3. Bestimmen Sie (mit kurzer Begründung), welche der Graphen irreduzibel und/oder aperiodisch sind, und welche nicht.

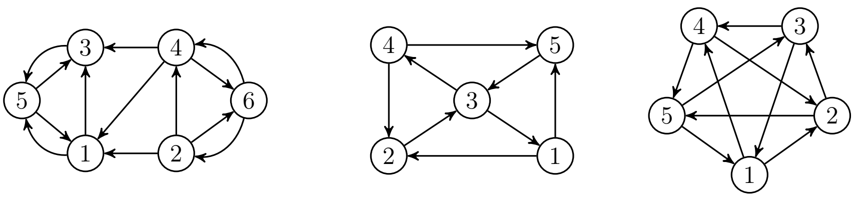


Abbildung 1: Links: G_1, Mitte: G_2, rechts: G_3

b) Wir modellieren die Bewegung einer einzelnen Schachfigur auf einem Schachbrett als Markov-Kette mit Zuständen $V := \{\mathrm{a}, \ldots, \mathrm{h}\} \times \{1, \ldots, 8\}$. In jedem Schritt führt die Figur einen der ihr nach den Schachregeln möglichen Züge aus, wobei jeder Zug mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Es ist nicht zulässig, dass die Figur auf ihrem Feld stehen bleibt, sie *muss* sich bewegen.

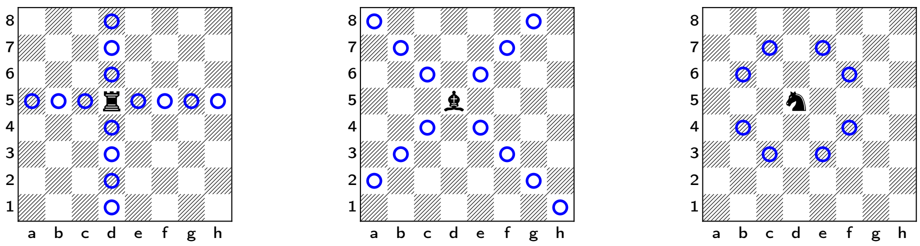


Abbildung 2: Schachfeld mit Spielfigur. Links: Turm, Mitte: Läufer, rechts: Springer. Die möglichen Züge jeder Figur sind mit blauen Kreisen markiert.

Geben Sie jeweils an, ob die so beschriebene Markov-Kette irreduzibel bzw. aperiodisch ist, wenn es sich bei der Figur um einen

i) Turm ii) Läufer iii) Springer

handelt. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort. Sie brauchen die Markov-Kette bzw. ihren Graphen und ihre Übergangsmatrix nicht explizit zu bestimmen!

Aufgabe 10.2. *Regen und Schirme* (8 + 3 + 4 + 4 + 6 = 25 Punkte)

Alice besitzt vier Regenschirme, zwei davon zu Hause und zwei auf der Arbeit. Alice geht morgens von zu Hause zur Arbeit und abends von der Arbeit zurück nach Hause. Es regnet unabhängig voneinander morgens mit Wahrscheinlichkeit $m > 0$ bzw. abends mit Wahrscheinlichkeit $a > 0$.

Falls an dem jeweiligen Ort ein Schirm vorhanden ist und es regnet, so nimmt Alice einen Schirm mit. Andernfalls nimmt Alice keinen Schirm mit.

a) Modellieren Sie das Geschehen als Markov-Kette. Ihre Zustände sollten ausdrücken, wie viele Schirme sich morgens (vor der Arbeit) bei Alice zu Hause befinden. Geben Sie auch die Übergangsmatrix an.

b) Ist die Markov-Kette ergodisch? Begründen Sie!

c) Bestimmen Sie die Grenzverteilung für $m = a = 1/4$.

d) Bestimmen Sie die Grenzverteilung für $m = 1/4$ und $a = 1/3$.

e) Für die Parameter a und m aus c) und d): Wie hoch ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass Alice auf dem Weg zur Arbeit nass wird? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Alice auf dem Weg nach Hause nass wird?

Aufgabe 10.3. *Eindeutigkeit stationärer Verteilungen* $(10 + 10 = 20$ Punkte)

a) Jede *nicht*-aperiodische Markov-Kette lässt sich durch Hinzufügen von Eigenschleifen in eine aperiodische Kette überführen, welche dieselben stationären Verteilungen besitzt, und zwar wie folgt:

Sei $\mathcal{M} = (G, P)$ eine beliebige Markov-Kette mit $G = (V, E)$ und sei I die Einheitsmatrix. Betrachte die Markov-Kette $\mathcal{M}' = (G', P')$ mit $G' = (V, E')$, $E' = E \cup \{(i, i) : i \in V\}$ und $P' = \frac{P+I}{2}$.

Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ besitzen dieselben stationären Verteilungen, d. h. für jede Verteilung σ gilt:

$$\sigma \text{ ist eine stationäre Verteilung für } \mathcal{M}' \iff \sigma \text{ ist eine stationäre Verteilung für } \mathcal{M}.$$

b) Sei $\mathcal{M}$ eine irreduzible Markov-Kette. Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ besitzt *genau eine* stationäre Verteilung.

Hinweis: Verwenden Sie Ergebnisse aus der Vorlesung!

Aufgabe 10.4. *Volles Risiko oder auf Nummer sicher gehen?* $(8 + 8 + 6 + 6 = 28$ Punkte)

Bob kam mit 10 Euro ins Casino und hat alles bis auf 3 Euro verspielt. Die Taxifahrt nach Hause kostet jedoch 8 Euro.
Am Roulette-Tisch kann Bob Geld auf „gerade" oder „ungerade" setzen und dabei den gesetzten Betrag verdoppeln oder verlieren. Bobs Gewinnwahrscheinlichkeit für eine Partie sei $p \in (0, 1)$.

Bob möchte sich sein Taxigeld erspielen und entscheidet sich dabei für eine der folgenden Strategien:

- Bei der *vorsichtigen* Strategie setzt er stets einen Euro und verlässt den Tisch, sobald er 8 Euro hat oder pleite ist. (Pro Partie kann Bob also einen Euro gewinnen oder verlieren.)
- Bei der *aggressiven* Strategie setzt er stets soviel wie möglich, *aber nicht mehr als nötig*, um den Tisch mit 8 Euro zu verlassen. Er verlässt den Tisch, sobald er 8 Euro hat oder pleite ist.

a) Modellieren Sie jede der beiden Strategien als Markov-Kette.

b) Bestimmen Sie für beide Strategien die Wahrscheinlichkeit w_{taxi}, dass Bob mit dem Taxi nach Hause fahren kann.

Hinweis: Für die vorsichtige Strategie können Sie die Ergebnisse zum Gambler's-Ruin-Problem aus der Vorlesung (Beispiel 6.11 im Skript) verwenden. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $p = 1/2$ und $p \neq 1/2$.

c) Berechnen Sie für beide Strategien jeweils die Wahrscheinlichkeit w_{taxi} für die drei Fälle

i) $p = \frac{2}{5}$, ii) $p = \frac{1}{2}$, iii) $p = \frac{3}{5}$.

d) Plotten[1] Sie den Funktionsgraphen der Wahrscheinlichkeiten w_{taxi} für beide Strategien in Abhängigkeit von p und diskutieren Sie das Ergebnis.

[1] z. B. mit diesem Online-Tool: `https://rechneronline.de/funktionsgraphen/`

Weihnachtsaufgabe 10.5. *Gambler's Ruin* ($8^* + 6^* + 8^* + 8^* = 30^*$ Punkte)

Wir betrachten die Gambler's-Ruin-Kette aus der Vorlesung (Beispiel 6.11 im Skript) und wollen nun die Wahrscheinlichkeit herleiten, dass der Spieler die Bank sprengt.

Sei K das Startkapital des Spielers, N das Kapital des Casinos und $M := K + N$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit des Spielers für eine Partie sei $p \in (0, 1)$ und es sei $q := 1 - p$. Es sei s_K die Wahrscheinlichkeit, die Bank zu sprengen, d. h. vom Zustand K aus den Zustand M zu erreichen.

a) Stellen Sie eine Rekursionsgleichung für s_K in Abhängigkeit von s_{K-1} und s_{K+1} auf. Welche Werte haben s_0 bzw. s_M?

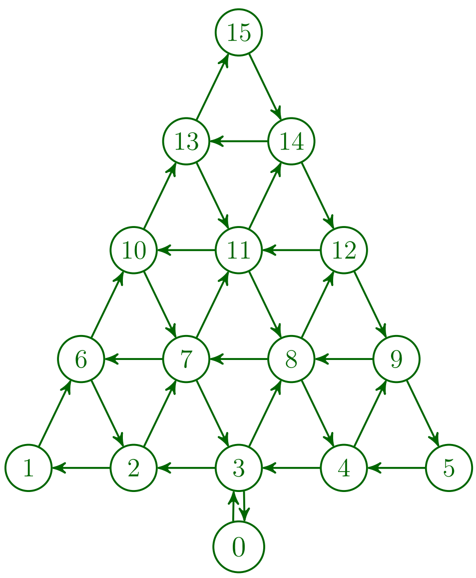
b) Zeigen Sie, dass für $0 < K < M$ gilt: $s_{K+1} - s_K = \frac{q}{p}(s_K - s_{K-1})$.

c) Zeigen Sie: $s_K = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^K}{1-q/p} \cdot s_1 & \text{falls } p \neq q, \\ K \cdot s_1 & \text{falls } p = q\,. \end{cases}$

Hinweis: Expandieren Sie die Gleichung aus Teil b), sodass Sie $s_{K+1} - s_K$ in Abhängigkeit von s_1 und s_0 ausdrücken. Verwenden Sie anschließend eine Teleskopsumme (siehe z. B. `https://de.wikipedia.org/wiki/Teleskopsumme`).

d) Zeigen Sie: $s_K = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^K}{1-(q/p)^M} & \text{falls } p \neq q, \\ \frac{K}{M} & \text{falls } p = q\,. \end{cases}$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst s_1 mithilfe der Gleichung aus c) und Ihrem Wissen über s_M. Setzen Sie dann s_1 in die Gleichung aus c) ein.



Eine besinnliche Denkaufgabe zum Jahresende:
Ist der Weihnachtsbaum aperiodisch?
Ist der Weihnachtsbaum irreduzibel?
Ist der Weihnachtsbaum ergodisch?

<3 *Frohe Feiertage und einen tollen Start ins Jahr 2017!* <3