Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Georg Schnitger

23. Februar 2017

Diskrete Modellierung (WS 16/17)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

⇓ BITTE GENAU BEFOLGEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind in dieser Klausur keine Hilfsmittel erlaubt. Das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel stellt eine Täuschung dar und führt zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur. Schalten Sie insbesondere Ihre Handys und Smartwatches vor Beginn der Klausur aus.
- Legen Sie Ihre Goethe-Card deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir während der Klausur Ihre Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur alle von 2 bis 18 durchnummerierten Seiten enthält.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Notfalls können Sie auch die beigefügten Zusatzblätter am Ende der Klausur benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich. Wenn Sie Lösungen auf Zusatzblättern notieren, vermerken Sie dies bitte deutlich bei den jeweiligen Aufgabenstellungen.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung diese verlangt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.
- Schreiben Sie ausschließlich mit einem dokumentenechten blauen oder schwarzen Stift. Verwenden Sie keinen Bleistift, kein Tipp-Ex, keinen radierbaren Kugelschreiber oder löschbaren Füller.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Ihre durch die Übungsaufgaben im WS 16/17 erworbenen Bonuspunkte werden zu der in der Klausur erreichten Punktzahl addiert. Erreichen Sie insgesamt $z \geq 50$ Punkte, so ist die Prüfung bestanden. Die Noten verteilen sich wie folgt:

Note	z	Note	z	Note	z	Note
1:			$z \geq 95$	$1,0$	$95 > z \geq 90$	$1,3$
2:	$90 > z \geq 85$	$1,7$	$85 > z \geq 80$	$2,0$	$80 > z \geq 75$	$2,3$
3:	$75 > z \geq 70$	$2,7$	$70 > z \geq 65$	$3,0$	$65 > z \geq 60$	$3,3$
4:	$60 > z \geq 55$	$3,7$	$55 > z \geq 50$	$4,0$		

Aufgabe	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**	**3a**	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**	**4d**	**5**
maximale Punkte	8	7	6	6	8	6	8	4	9	9	5	9	9	6
erreichte Punkte														

summiert					

Viel Erfolg!

	Klausur	**Bonus**	**Gesamt**
maximal	100	15	115
erreicht			

Note:

Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) Ein Verbrechen ist geschehen. Es gibt drei Tatverdächtige, nämlich A, B und C. Man weiß: **[8 Pkte]**

Indiz 1: Entweder B oder C ist beteiligt.

Indiz 2: Genau einer der Verdächtigen ist beteiligt.

Indiz 3: B ist nur dann beteiligt, wenn auch A beteiligt ist.

Formalisieren Sie die drei Indizien durch je eine aussagenlogische Formel.

$\varphi_{\text{Indiz 1}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Indiz 2}} :=$ (2 Pkte)

$\varphi_{\text{Indiz 3}} :=$ (2 Pkte)

Bestimmen Sie *alle* Verdächtigen, die tatsächlich an der Tat beteiligt waren.
Begründen Sie Ihre Antwort. Eine direkte Argumentation mithilfe der drei Indizien genügt, Sie können aber auch die untenstehende Wahrheitstafel verwenden.

(2 Pkte)

Tatbeteiligte(r):

Begründung:

A	**B**	**C**	$\varphi_{\text{Indiz 1}}$	$\varphi_{\text{Indiz 2}}$	$\varphi_{\text{Indiz 3}}$	
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

(b) **[7 Pkte]**

(i) Geben Sie an, ob die aussagenlogische Formel (3 Pkte)

$$\varphi := (X \leftrightarrow Z) \vee (X \oplus Z)$$

erfüllbar und/oder falsifizierbar ist.

Kreuzen Sie **alle** richtigen Antworten an.

φ ist **erfüllbar:** ☐ ja ☐ nein

φ ist **falsifizierbar:** ☐ ja ☐ nein

Falls φ **erfüllbar** ist, geben Sie eine Belegung an, die φ erfüllt:

Falls φ **falsifzierbar** ist, geben Sie eine Belegung an, die φ falsifiziert:

(ii) Leiten Sie den leeren Disjunktionsterm ϵ mittels **Resolution** aus der Menge (4 Pkte)

$$K := \Big\{ \{A, B\}, \{\neg A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C\}, \{A, \neg C\} \Big\}$$

von Disjunktionstermen her.

Geben Sie alle Schritte Ihres Resolutionsbeweises an. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Disjunktionsterme (ob zu K gehörig oder zwischenzeitlich abgeleitet) benutzt werden.

(c) **[6 Pkte]**

(i) Geben Sie eine zur Formel (4 Pkte)

$$\psi := (\neg B \to A) \wedge (\neg B \to C) \wedge (\neg A \vee \neg C)$$

äquivalente Formel ψ' in **disjunktiver** Normalform (DNF) an.
(Wenn Sie Ihren Lösungsweg angeben, können Sie Teilpunkte auch bei falscher Lösung erhalten.)

Sie können die untenstehende Wahrheitstafel verwenden.

A	**B**	**C**	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

(ii) Geben Sie eine zur Formel (2 Pkte)

$$\chi := \neg\psi$$

äquivalente Formel χ' in **konjunktiver** Normalform (KNF) an.

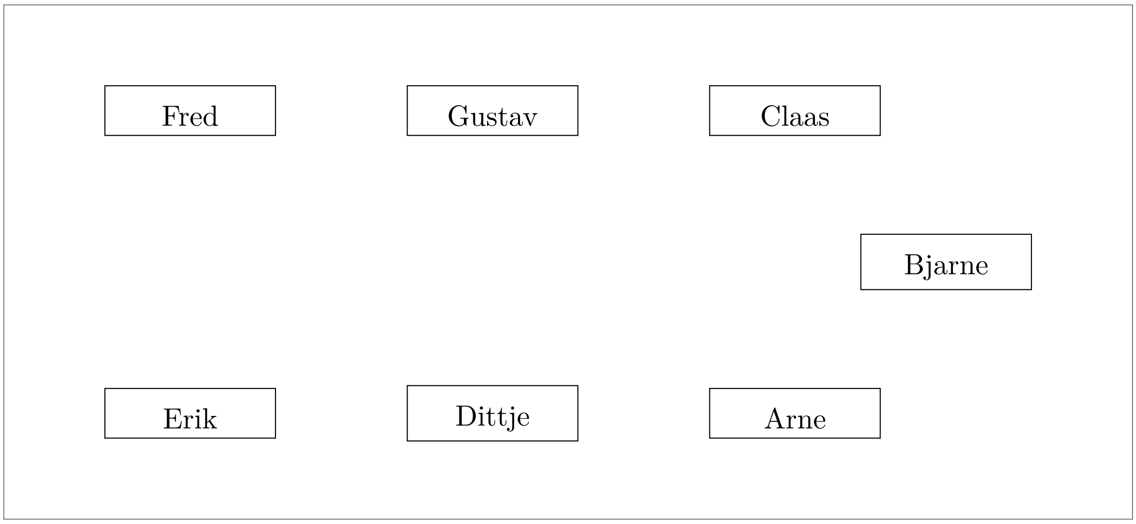
$\chi' =$

Aufgabe 2: Graphen

(a) Sieben Seefahrer (Arne, Bjarne, Claas, Dittje, Erik, Fred und Gustav) möchten mit kleinen Segelbooten über den Main fahren, und zwar von der Frankfurter Innenstadt nach Sachsenhausen. Allerdings bestehen bezüglich der Überfahrt die folgenden Konflikte: **[6 Pkte]**

- Arne kann weder mit Bjarne noch mit Dittje segeln.
- Fred, Erik und Dittje stehen untereinander im Konflikt.
- Weder Bjarne noch Dittje wollen auf demselben Boot fahren wie Claas.
- Gustav kann mit keinem Seefahrer außer Arne oder Bjarne segeln.

(i) Modellieren Sie alle **Konflikte** durch einen ungerichteten Graphen G. (2 Pkte)

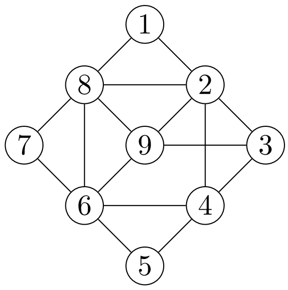


(ii) Welches graphentheoretische Problem in G muss gelöst werden, damit alle sieben Seefahrer gleichzeitig über den Main fahren können und möglichst wenige Segelboote brauchen? (2 Pkte)

(iii) Wie viele Segelboote benötigen die sieben Seefahrer? (2 Pkte)
Begründen Sie Ihre Antwort.

Die sieben Seefahrer benötigen ______ Segelboote, weil ...

(b) Sei der Graph $G = (V, E)$ durch die folgende Abbildung gegeben: **[8 Pkte]**



(i) Geben Sie ein möglichst großes Matching M in G an. (2 Pkte)

$M = \{$

(ii) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort. (3 Pkte)

Jeder planare Graph ist mit höchstens drei Farben konfliktfrei färbbar.

☐ wahr ☐ falsch

Beweis:

(iii) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (3 Pkte)

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Jeder Baum mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten. ☐ wahr ☐ falsch
- Graphisomorphie ist eine Äquivalenzrelation. ☐ wahr ☐ falsch
- Jeder stark zusammenhängende Graph besitzt einen Hamiltonkreis. ☐ wahr ☐ falsch

(c) In einer Werbe-E-Mail **behauptet** ein Social-Network-Analysis-Unternehmen: **[6 Pkte]**

$(*)$ „In jeder Gruppe mit n Personen ($n \geq 2$) existieren mindestens zwei Personen, die dieselbe Anzahl von Freunden innerhalb dieser Gruppe haben."

Nehmen Sie hierfür an, dass die Freundschaftsrelation symmetrisch ist, d. h. Person i ist mit Person j genau dann befreundet, wenn auch Person j mit Person i befreundet ist.

(i) Formalisieren Sie die Behauptung $(*)$ durch eine graphentheoretische Aussage. (2 Pkte)

(ii) Beweisen Sie die Behauptung $(*)$. (4 Pkte)

Aufgabe 3: Markov-Ketten

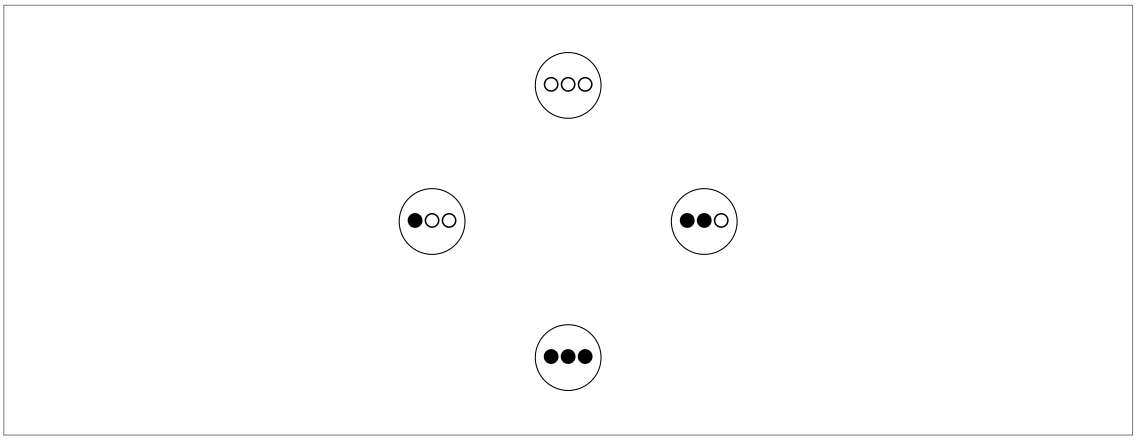
(a) In einer Urne befinden sich drei Kugeln, die jeweils entweder schwarz oder weiß sind. **[8 Pkte]**

Bob führt das folgende Verfahren durch: Er entfernt zufällig zwei der drei Kugeln aus der Urne.

- Falls die zwei entfernten Kugeln dieselbe Farbe haben, dann legt er zwei Kugeln der anderen Farbe in die Urne zurück.
- Falls die zwei entfernten Kugeln unterschiedliche Farben haben, dann legt er zwei weiße Kugeln zurück.

(i) Modellieren Sie das Verfahren durch eine Markov-Kette (G, P). Geben Sie den Graphen G in graphischer Darstellung an und beschriften Sie die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten. Ein Zustand gibt an, wie viele weiße bzw. schwarze Kugeln in der Urne sind, z. B. bedeutet ●○○, dass eine schwarze und zwei weiße Kugeln in der Urne sind. (6 Pkte)

(Sie müssen die Übergangsmatrix P nicht angeben.)



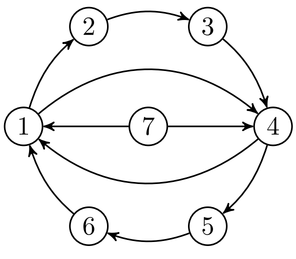
(ii) Ist die Markov-Kette (G, P) ergodisch? (1 Pkt)

☐ ja ☐ nein

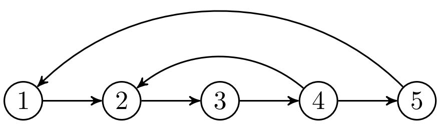
(iii) Besitzt (G, P) eine eindeutige stationäre Verteilung? (1 Pkt)

☐ ja ☐ nein

(b) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1 und G_2: **[4 Pkte]**



G_1

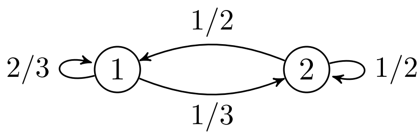


G_2

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

G_1 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_1 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein

(c) Betrachten Sie die folgende Markov-Kette $M := (G, P)$ **[9 Pkte]**



(i) Stellen Sie die Übergangsmatrix P auf. (1 Pkt)

$P =$

(ii) Die Markov-Kette beginne mit der Verteilung $X^{(0)} = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$. (6 Pkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
Die Markov-Kette besitzt nach k Schritten die Verteilung $X^{(k)} = \left(\frac{1}{5}(3+6^{-k}),\ \frac{1}{5}(2-6^{-k})\right)$.

(iii) Bestimmen Sie alle stationären Verteilungen von M. (2 Pkte)
(Sie dürfen Teil (ii) auch dann verwenden, wenn Sie ihn nicht gelöst haben.)

Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

(a) **[9 Pkte]**

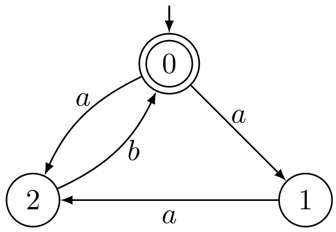
(i) Gegeben sei der reguläre Ausdruck (3 Pkte)

$$R := (\varepsilon|a|b)(b^*a^*)^*b.$$

Welche der folgenden Worte liegen in der Sprache $L(R)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Wort	... liegt in $L(R)$?	
b	☐ ja	☐ nein
$aaab$	☐ ja	☐ nein
$abab$	☐ ja	☐ nein

(ii) Gegeben sei der folgende NFA N über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$.



Beschreiben Sie die Sprache $L(N)$ durch einen regulären Ausdruck. (3 Pkte)

Geben Sie mithilfe der Potenzmengenkonstruktion einen DFA D in graphischer Darstellung an, der dieselbe Sprache wie der NFA N akzeptiert. Berücksichtigen Sie in D nur solche Zustände, die vom Startzustand $\{0\}$ aus erreichbar sind. (3 Pkte)

(Sie können folgende Vorlage verwenden.)

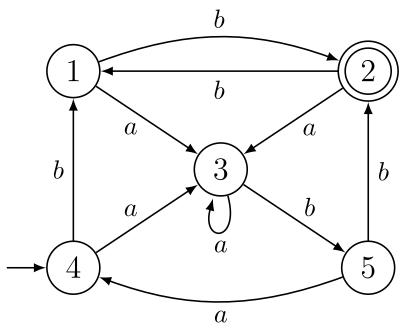
	a	b
$\{0\}$		
$\{1\}$		
$\{2\}$		

(b) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei wie folgt definiert: **[5 Pkte]**

$$L := \{w \in \Sigma^* : \text{ die Anzahl der } a\text{'s und } b\text{'s in } w \text{ ist jeweils gerade } \}$$

Konstruieren Sie einen DFA D mit genau vier Zuständen für L.

(c) (i) Der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ sei gegeben: **[9 Pkte]**



Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A' für A. Geben Sie A' in graphischer Darstellung an. (6 Pkte)
(Wenn Sie Zwischenschritte angeben, können Sie auch bei falscher Lösung Teilpunkte erhalten.)

(Sie können folgende Vorlage verwenden.)

2				
3				
4				
5				
	1	2	3	4

Äquivalenzklassenautomat A':

(ii) Geben Sie die Definition der Verschmelzungsrelation an. (3 Pkte)

Sei $A := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA und $q_1, q_2 \in Q$.

Dann gilt $q_1 \equiv_A q_2$ genau dann, wenn ...

(d) **[9 Pkte]**

(i) Die Sprache $L_1 := L(a^* \cdot b)$ ist durch den regulären Ausdruck $a^* \cdot b$ gegeben. (3 Pkte)
Geben Sie für jede der drei Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $\equiv_{L_1}$ einen Vertreter an.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgende Sprache nicht regulär ist. (6 Pkte)

$$L_2 := \left\{ w \in \{a, b\}^* : |w|_a \geq \tfrac{1}{2} \cdot |w| \right\}$$

Beweis:

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

[6 Pkte]

(i) Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ an, so dass gilt (4 Pkte)

$$L(G) = \{a^m b^n c^{n+m} \; : \; m, n \in \mathbb{N}\}.$$

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V = \Big\{$

$P = \Big\{$

(ii) Geben Sie eine *kontextfreie* Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an, die *nicht regulär* ist. (2 Pkte)

$L =$