Diskrete Modellierung

Wintersemester 2017/18

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 4

Ausgabe: 09.11.2017
Abgabe: 16.11.2017

Zur Beantwortung der Aufgaben 4.1a) und 4.4 können Sie die Python-Bibliothek SymPy verwenden, die unter http://live.sympy.org/ als Webanwendung abrufbar ist. Alternativ können Sie auch Jupyter Notebook (abrufbar unter https://try.jupyter.org/) verwenden. Machen Sie sich mithilfe der Bemerkungen 3.27 und 3.33 im Skript mit SymPy vertraut. Begründen Sie Ihre Antworten zu diesen Aufgaben, indem Sie den relevanten SymPy-Quellcode ausdrucken und gegebenenfalls weitere Erläuterungen hinzufügen.

Aufgabe 4.1 *Semantische Folgerung und Äquivalenz* (6 + 15 = 21 Punkte)

a) Entscheiden Sie jeweils, ob die semantischen Folgerungen $\varphi_i \models \psi_i$ und/oder $\psi_i \models \varphi_i$ bzw. die Äquivalenzen $\varphi_i \equiv \psi_i$ gelten. Erläutern Sie jeweils kurz, wie Sie zu Ihrem Ergebnis kommen.

i) $\varphi_1 := (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg D \vee A)$
$\psi_1 := \mathbf{1} \oplus A \oplus B \oplus C \oplus D$

ii) $\varphi_2 := \neg(A \vee B \vee C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee \big(A \wedge (B \oplus C)\big)$
$\psi_2 := \big(A \vee (B \oplus C)\big) \wedge \big(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)\big)$

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle aussagenlogischen Formeln φ, ψ und χ gilt

i) $\big((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)\big) \models (\varphi \rightarrow \chi)$

ii) $\big((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \psi\big) \models \varphi$

iii) $\varphi \equiv \psi \equiv \chi$ gilt genau dann, wenn $(\varphi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi)$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 4.2 *KNFs und DNFs* (8 + 2 + 8 + 3 = 21 Punkte)

Sei $\varphi := \big((A \rightarrow B) \rightarrow C\big) \leftrightarrow \big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big)$.

a) Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für φ und geben Sie die Konjunktionsterme an, die den 1-Zeilen der Wahrheitstafel entsprechen.

b) Geben Sie eine zu φ äquivalente Formel in disjunktiver Normalform (DNF) an.

c) Geben Sie eine zu φ äquivalente Formel in konjunktiver Normalform (KNF) an.

d) Geben Sie eine zu $\neg\varphi$ äquivalente Formel in konjunktiver Normalform (KNF) an.

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen erforderlich.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.3 *Modellierung mit KNFs: ein Camping-Puzzle* $(4 + (5{\times}5) + 4 = 33$ Punkte)

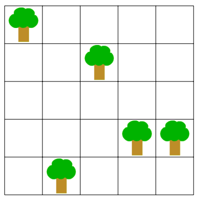
Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Sie machen mit Ihren Kumpels und Kumpelinen einen Camping-Ausflug auf einem $k{\times}k$-Gitter mit einer Wald- und Wiesenlandschaft wie aus einem Bilderbuch. Sei $\mathbf{G}_k := \{1, 2, \ldots, k\}^2$ die Menge aller Zellen des Gitters und sei **Bäume** $\subseteq \mathbf{G}_k$ die Menge der Zellen, in denen ein Baum steht.

Wo sollten Sie am besten die Zelte aufbauen? Da Sie optimal vorbereitet sind, haben Sie die Ratgeber-Broschüre „Survival-Guide: Informatiknahes Camping für Dummies“ gelesen. Dort werden wichtige Regeln gegeben, die Sie beim Camping einhalten müssen:

1. Ein Zelt kann nur dort platziert werden, wo kein Baum steht.
2. Ein Zelt muss horizontal oder vertikal mit einem Baum benachbart sein.
3. Zelte dürfen nicht horizontal, nicht vertikal und auch nicht diagonal benachbart sein.
4. In **jeder** Spalte muss *mindestens* ein Zelt stehen.
5. In **jeder** Zeile darf *höchstens* ein Zelt stehen.

Verwenden Sie im Folgenden für alle $(i, j) \in \mathbf{G}_k$ die Variablen $\mathbf{Z}_{i,j}$ mit der Bedeutung „in Zelle (i, j) steht ein Zelt“ und die Variablen $\mathbf{B}_{i,j}$ mit der Bedeutung „in Zelle (i, j) steht ein Baum“.

a) Platzieren Sie auf dem folgenden 5×5-Gitter fünf Zelte und halten Sie dabei die Regeln aus dem Survival-Guide ein. (Eine Begründung ist nicht erforderlich.)



b) Für das allgemeine Camping-Puzzle, also für beliebiges $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und eine beliebige Teilmenge **Bäume** $\subseteq \mathbf{G}_k$ wollen wir die Positionen der Bäume auf dem Gitter und die fünf Regeln durch aussagenlogische Formeln ausdrücken. Die korrekte Platzierung der Bäume erzwingen wir mit folgender Formel

$$\varphi_{\text{Baum}} := \bigwedge_{(i,j)\in\textbf{Bäume}} \mathbf{B}_{i,j} \wedge \bigwedge_{(i,j)\in\mathbf{G}_k\setminus\textbf{Bäume}} \neg\mathbf{B}_{i,j}\ .$$

Alle Formeln sind in **konjunktiver Normalform** (KNF) anzugeben. Erläutern Sie außerdem jeweils kurz die Idee, die Ihrer Formel zugrunde liegt. Gehen Sie analog zur KNF-Modellierung des Sudoku-Spiels (Beispiel 3.48 im Skript) vor.

i) Geben Sie eine Formel φ_1 an, die Regel 1 formalisiert. Die Formel φ_1 besagt also für jede Zelle $(i, j) \in \mathbf{G}_k$: „Wenn ein Zelt in Zelle (i, j) steht, dann steht dort kein Baum.“

ii) Geben Sie eine Formel φ_2 an, die Regel 2 formalisiert.

Hinweis: Für jede Zelle $(i, j) \in \mathbf{G}_k$ ist $\mathbf{HV}(i, j) := \big\{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\big\} \cap \mathbf{G}_k$ die Indexmenge aller mit (i, j) horizontal oder vertikal benachbarten Zellen auf dem Gitter $\mathbf{G}_k$. Nutzen Sie die Mengen $\mathbf{HV}(1, 1), \mathbf{HV}(1, 2), \ldots, \mathbf{HV}(k, k)$ für Ihre Formel φ_2.

iii) Geben Sie eine Formel φ_3 an, die Regel 3 formalisiert.

Hinweis: Definieren Sie analog zu ii) geeignete Indexmengen.

iv) Geben Sie eine Formel φ_4 an, die Regel 4 formalisiert.

v) Geben Sie eine Formel φ_5 an, die Regel 5 formalisiert.

Hinweis: Notationen wie $\bigwedge_{i=1}^{k} \cdots$ oder $\bigwedge_{(i,j)\in M} \cdots$ (für eine Menge M) oder $\bigwedge_{(i,j)\in G_k} \bigvee_{(i',j')\in\mathbf{HV}(i,j)} \cdots$ sind hier hilfreich.

c) Geben Sie eine Formel φ in KNF an, sodass die erfüllenden Belegungen genau den legalen Platzierungen von Bäumen und Zelten gemäß den fünf Regeln entsprechen.

Aufgabe 4.4 *Modellierung und SymPy* $(6 + 8 + 4 + 7 = 25$ Punkte)

Für die neue Reality-Dokusoap *Stars und Tränen in Frankfurt* des Fernsehsenders RDL findet ein Casting für Laiendarsteller statt. Bei der Auswahl der Darsteller ist allerdings einiges zu berücksichtigen. Zwischen den Kandidaten (**A**shley, **B**randon, **C**hantalle, **D**örthe, **E**tienne, **F**ranziska, **G**undolf und **H**ugo) bestehen aufgrund zahlreicher Lügen und Intrigen gewisse Freund- und Feindschaften.

1) **H**ugo spielt genau dann mit, wenn **E**tienne nicht mitspielt oder **C**hantalle mitspielt.
2) **E**tienne ist nur dabei, wenn er nicht der einzige Darsteller ist.
3) **B**randon spielt auf jeden Fall mit, aber **G**undolf, **B**randon und **F**ranziska dürfen nicht alle drei mitspielen.
4) **F**ranziska und **C**hantalle sind so untalentiert, dass höchstens eine von beiden mitspielen darf.
5) Es muss eine gerade Anzahl von Darstellern mitspielen, da die Dokusoap das Spannungsverhältnis von Zweierbeziehungen ergründet.
6) **A**shley und **C**hantalle sind sich so spinnefeind, dass höchstens eine der beiden mitspielen kann.

Benutzen Sie im Folgenden die Variablen $A, B, \ldots, H$ mit den Bedeutungen „**A**shley spielt mit“, „**B**randon spielt mit“, …, „**H**ugo spielt mit“. Für Teil a) und b) ist keine Begründung erforderlich.

a) Formalisieren Sie die Aussagen 1) bis 6) durch aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$. Geben Sie außerdem eine Formel φ an, die genau dann erfüllt ist, wenn alle sechs Aussagen zutreffen.

b) Definieren Sie SymPy-Variablen `A`, `B`, …, `H` und SymPy-Formeln für Ihre Formeln aus Teil a).

c) Beantworten Sie die folgenden Fragen unter Zuhilfenahme der `satisfiable`-Funktion.

- Ist es zwingend erforderlich, dass **D**örthe mitspielt?
- Wie viele Darsteller können maximal mitspielen?

Hinweis: Sie können die Erfüllbarkeit einer Formel `psi` mittels `satisfiable(psi)` prüfen und sich – sofern vorhanden – eine erfüllende Belegung ausgeben lassen.

Mit dem Aufruf

```
for b in satisfiable(psi, all_models=True):
    pretty_print(b)
```

können Sie alle erfüllenden Belegungen von `psi` ausgeben lassen.

d) Für „Stars und Tränen in Frankfurt“ sind auch zwei Hauptrollen zu besetzen, *Muskelprotz* und *Youtube-Star*. Natürlich darf kein Darsteller beide Hauptrollen spielen.

i) Nur **E**tienne, **F**ranziska oder **H**ugo können einen Muskelprotz spielen. Kann die Rolle besetzt werden, wenn weiterhin die Aussagen 1 bis 6 zutreffen?

ii) Als Youtube-Star kommen nur **A**shley, **F**ranziska oder **G**undolf in Frage. Wir führen für jeden Darsteller X die beiden Variablen X_M und X_Y ein, nämlich mit der Bedeutung „X spielt den Muskelprotz“ bzw. „X spielt den Youtube-Star“.

Fügen Sie unter anderem Formeln der Form $\big((X_M \vee X_Y) \rightarrow X\big)$ hinzu. Welche weiteren Formeln müssen Sie hinzufügen, damit kein Darsteller beide Hauptrollen gleichzeitig spielen kann?

Ist es möglich, beide Hauptrollen gleichzeitig zu besetzen?