Diskrete Modellierung

Wintersemester 2017/18

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

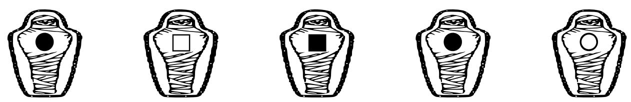
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 5

Ausgabe: 16.11.17
Abgabe: 23.11.17

Aufgabe 5.1 *Implikationen, Quantoren und Negationen* $(6 + 10 + 9 = 25$ Punkte$)$

a) Tief im Inneren einer Pyramide finden Sie fünf Mumien, die vor 4000 Jahren in Leinenbinden eingewickelt wurden. Die Mumien sind jeweils auf Vorder- und Rückseite bemalt, und zwar auf der einen Seite mit einem *Quadrat* (schwarz bzw. weiß) und auf der anderen Seite mit einem *Kreis* (ebenfalls schwarz bzw. weiß).



Wir wollen testen, ob die folgende **Behauptung** wahr ist:

> *„Für jede Mumie gilt: Ist auf einer Seite der Mumie ein weißes Quadrat, dann ist auf der anderen Seite ein schwarzer Kreis.“*

Natürlich könnten wir alle fünf Mumien umdrehen, um den Wahrheitsgehalt der Behauptung zu überprüfen, aber die Mumien sollten auf keinen Fall unnötig bewegt werden. Andernfalls droht der Fluch des Pharaos und das wollen wir nun wirklich nicht riskieren!

i) Welche Mumien *müssen* wir umdrehen, um die Behauptung zu verifizieren?

ii) Finden Sie den Fehler im folgenden Argument:
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann ist auf der Rückseite der zweiten Mumie von links ein weißer Kreis.

b) Wir betrachten Färbungen $f : \mathbb{N} \to \{\text{blau}, \text{rot}\}$ der natürlichen Zahlen, sodass für jede rot gefärbte Zahl, eine **mindestens doppelt so große**, blau gefärbte Zahl existiert.

Welche der folgenden Aussagen i) bis v) gelten für diese Färbungen stets? Eine kurze Begründung genügt.

i) Es gilt $f(0) = \text{rot}$.
ii) Für jede blau gefärbte Zahl gibt es eine höchstens halb so große rot gefärbte Zahl.
iii) $f^{-1}(\{\text{blau}\}) = \{x \in \mathbb{N} : f(x) = \text{blau}\}$ ist unendlich.
iv) Wenn $f(1) = \text{rot}$ gilt, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) = \text{rot}$ und $f(n+1) = \text{blau}$ gilt.
v) Es gibt eine größte rot gefärbte Zahl.

c) Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen jeweils umgangssprachlich.
Eine Begründung ist nicht erforderlich.

i) Alle Katzen sind grau.

ii) Wenn es Einhörner gibt, dann können alle Elefanten fliegen.

iii) Für jeden Jedi gilt: Die Macht ist genau dann stark in ihm, wenn in seinem Blut Midi-Chlorianer zu finden sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.2 *Resolution* ((7+7) + 7 + 4 = 25 Punkte)

a) Leiten Sie jeweils mittels Resolution die leere Klausel ϵ aus den Klauselmengen K_1 bzw. K_2 her.

   i) $K_1 := \Big\{\{P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg P, \neg R\}, \{\neg Q, \neg R\}, \{Q, R\}\Big\}$

   ii) $K_2 := \Big\{\{X, Y\}, \{X, Z\}, \{Y, Z\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{\neg X, \neg Z\}, \{\neg Y, \neg Z\}\Big\}$

b) Zeigen Sie mit Resolution, dass die KNF-Formel

$$\psi := \big(A \vee B \vee D\big) \wedge \big(\neg A\big) \wedge \big(A \vee B \vee C \vee \neg D\big) \wedge \big(A \vee \neg B\big) \wedge \big(A \vee B \vee \neg C \vee \neg D\big)$$

unerfüllbar ist. Wandeln Sie die Formel zunächst in eine Klauselmenge um.

c) Erläutern Sie, warum der folgende „Resolutionsschritt“ **falsch** ist:

$$\frac{\{A, B\}, \{\neg A, \neg B\}}{\epsilon}$$

Aufgabe 5.3 *Fallunterscheidungen: das Skiverleihproblem* (6 + 7 + 12 = 25 Punkte)

Im Skiverleihproblem haben wir die Optionen, ein Paar Ski für 20 Euro pro Tag zu leihen oder einmalig für 100 Euro zu kaufen. Leider wissen wir erst am Morgen eines jeden Tages, ob wir überhaupt noch Lust haben, Ski zu fahren, oder ob die Ski-Saison für uns beendet ist.

Wir verfolgen folgende Strategie: An den ersten vier Tagen leihen wir uns jeweils ein Paar Ski, natürlich jeweils nur, wenn uns die Lust aufs Skifahren vorher noch nicht vergangen ist. Wenn wir auch am fünften Morgen noch Lust aufs Skifahren haben, kaufen wir die Ski.

a) Zeigen Sie: Egal, wann uns die Lust aufs Skifahren vergeht, wir bezahlen nie mehr als das $\frac{9}{5}$-fache des bestmöglichen Betrags.

b) Betrachte nun alternative Strategien der Form „leihe die Ski die ersten $n-1$ Tage und kaufe sie am n-ten Tag“.

   Zeigen Sie: Bei jeder Strategie dieser Form mit $n \neq 5$ bezahlt man im schlimmsten Fall mindestens das Doppelte des bestmöglichen Betrags.

   Hinweis: Warum ist es keine gute Idee, die Ski vor dem fünften Tag zu kaufen? Warum ist es keine gute Idee, die Ski fünf Tage (oder länger) zu leihen?

Betrachte nun das allgemeine Skiverleihproblem. Seien $L, v \in \mathbb{N}_{>0}$ positive natürliche Zahlen und sei $K := v \cdot L$. Für L Euro am Tag können wir ein Paar Ski leihen bzw. für K Euro kaufen.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachte wieder die Strategie: „Leihe die Ski die ersten $n-1$ Tage und kaufe sie am n-ten Tag.“

c) Bestimmen Sie den optimalen[1] Wert für n in Abhängigkeit von L und K.

   Weisen Sie auch die Korrektheit Ihrer Antwort nach.

Bitte wenden!

[1] D. h. das Verhältnis der tatsächlichen und der bestmöglichen Ausgaben soll *im schlimmsten Fall* minimal sein.

Aufgabe 5.4 *Verlustfreie Datenkompression* ((3+3) + (8+6) + 5 = 25 Punkte)

Um Speicherplatz bzw. Bandbreite zu sparen, werden Daten in vielen Anwendungen komprimiert. Dabei wird die Originaldatei durch ein Kompressionsverfahren *komprimiert*; vor der Verwendung wird die Datei wieder *dekomprimiert*.

Man unterscheidet zwei Arten von Kompressionsverfahren: Bei der verlustbehafteten Kompression, z. B. bei den Formaten MP3 und JPEG, wird nur ein Teil der Information der Originaldatei gespeichert. Dadurch kann eine gute Kompression erreicht werden, allerdings lässt sich die Originaldatei nicht identisch wiederherstellen. Bei der verlustfreien Kompression hingegen, z. B. bei den Formaten ZIP und PNG, kann die Originaldatei exakt wiederhergestellt werden.

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Eine endliche Folge (ein Tupel) von Nullen und/oder Einsen nennen wir ein *Wort*. Wir bezeichnen die Menge aller Wörter als Σ^*. Für ein Wort $x \in \Sigma^*$ bezeichnet $|x|$ seine Länge, d. h. die Anzahl seiner Nullen und Einsen. Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist Σ^n die Menge aller Wörter der Länge genau n und $\Sigma^{\leq n} = \bigcup_{i=0}^{n} \Sigma^i$ die Menge aller Wörter der Länge höchstens n. (Vergleiche Definition 7.3 im Skript.)

Jedes Kompressionsverfahren lässt sich als eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ modellieren: Eine Originaldatei $x \in \Sigma^*$ wird durch das Verfahren f auf die komprimierte Datei $f(x) \in \Sigma^*$ abgebildet. Ein *verlustfreies* Kompressionsverfahren ist zudem injektiv: Für je zwei unterschiedliche Dateien x, y muss $f(x) \neq f(y)$ gelten, damit eine eindeutige Dekompression möglich ist.

Wir wollen in dieser Aufgabe die Grenzen verlustfreier Kompressionsverfahren erkunden.

a) Für die Entwicklung eines neuen verlustfreien Kompressionsverfahrens benötigen Sie einen Kredit Ihrer Bank und haben daher einen Business-Plan ausgearbeitet. Sie versprechen, dass Ihr Kompressionsverfahren $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ keine einzige Datei verlängert, dass also $|f(y)| \leq |y|$ für jede Datei $y \in \Sigma^*$ gilt. (Das wäre eine absolute Neuheit auf dem Software-Markt!)

   i) Ihre Bank gewährt Ihnen nur einen Kredit, wenn Ihr Versprechen eingehalten werden kann. Gibt es überhaupt ein solches verlustfreies Kompressionsverfahren?

   ii) Im Verlauf des Kreditvergabegesprächs stellt Ihre Kreditberaterin Frau Verleihnix fest, dass sie die Länge der Datei $x = (0, 0, 0)$ mit Ihrem Kompressionsverfahren tatsächlich verringern kann. Für diese Datei gilt also $|f(x)| < 3$. Können Sie Ihr Versprechen nun überhaupt noch einhalten?

   Eine kurze, intuitiv nachvollziehbare Begründung genügt.

b) Sei $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine *injektive* Funktion und es gebe ein Wort $x \in \Sigma^*$ mit $|f(x)| < |x|$. Wir wollen nun mit einem *Beweis durch Widerspruch* zeigen, dass es dann auch ein Wort $y \in \Sigma^*$ mit $|f(y)| > |y|$ gibt.

   Gehen Sie hierfür in zwei Schritten vor:

   i) Sei $x \in \Sigma^*$ und sei $|x| > |f(x)| =: m$.
   Annahme: Es gibt kein $y \in \Sigma^*$ mit $|f(y)| > |y|$.
   Zeigen Sie: Dann gibt es eine injektive Funktion $g : \Sigma^{\leq m} \cup \{x\} \to \Sigma^{\leq m}$.

   ii) Zeigen Sie nun, dass die Annahme aus i) falsch ist, indem Sie einen Widerspruch herleiten.
   Hinweis: Sie können den folgenden Fakt ohne Beweis benutzen. Falls $A \subsetneq B$ und A, B *endlich* sind, dann gibt es keine injektive Funktion $f : B \to A$.

c) Gilt der Hinweis aus Teil b) ii) auch, wenn A und B *unendlich* sind? Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

   Für alle Mengen A und B gilt: Falls $A \subsetneq B$, dann gibt es keine injektive Funktion $f : B \to A$.