Diskrete Modellierung

Wintersemester 2017/18

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 9

Ausgabe: 14.12.17
Abgabe: 21.12.17

In Aufgabe 9.1 und 9.3 dürfen Sie einen Matrizenrechner (z. B. https://matrixcalc.org/de) als Hilfsmittel verwenden.

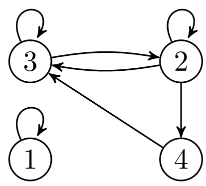
Aufgabe 9.1 *Peer-Review und Zufallssurfer* (8 + 8 + 4 + 6 + 14 = 40 Punkte)

Wir untersuchen den Ansatz des **Peer-Review** für den rechts dargestellten Webgraphen Web:

a) Zeigen Sie, dass das Tupel PR := $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. $d = \frac{1}{2}$ besitzt.

Hinweis: Sie müssen kein lineares Gleichungssystem **lösen**, sondern nur überprüfen, ob PR eine Lösung ist.

Web:



b) Löschen Sie die Kante $(3, 3)$ und bestimmen Sie die Page-Ranks für den neuen Webgraphen. Welche Page-Ranks steigen, welche sinken, welche bleiben gleich? Geben Sie eine informelle Erklärung der Phänomene an.

Wir betrachten nun den Ansatz des **Zufallssurfers**.

c) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $P_d(\text{Web})$ mit dem Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$ für den **oben** dargestellten Webgraphen Web.

d) Gegeben sei die Übergangsmatrix einer Webkette $\mathcal{W} = (\vec{K}_3, P_d(\text{Web}'))$ durch

$$P_d(\text{Web}') := \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

mit dem Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$. Geben Sie den zugrundeliegenden Webgraphen Web′ an.

e) Ein Zufallssurfer starte in Knoten 1, d. h. für die Anfangsverteilung gelte $\pi^{(0)} = (1, 0, 0)$.

Zur Erinnerung: $\pi^{(k)} = \pi^{(k-1)} \cdot P_d(\text{Web}') = \pi^{(0)} \cdot P_d(\text{Web}')^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$.

i) Berechnen Sie, wo sich der Surfer mit welcher Wahrscheinlichkeit nach einem, nach zehn bzw. nach 100 Schritten aufhält, d. h. berechnen Sie $\pi^{(1)}$ bzw. $\pi^{(10)}$ und $\pi^{(100)}$. Eine auf vier Nachkommastellen gerundete Lösung genügt.

ii) Stellen Sie eine Vermutung für den Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \pi^{(k)}$ auf.

iii) Zurück zum Ansatz des Peer-Review: Berechnen Sie eine Verteilung μ mit der Page-Rank-Eigenschaft für Web′ und den Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$.

Kommentar: Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \pi^{(k)}$ wird auch als Grenzverteilung bezeichnet. Später wird gezeigt, dass für „schöne“ Ketten Grenzverteilungen und Verteilungen mit der Page-Rank-Eigenschaft übereinstimmen.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.2 *Gryffindor vs. Ravenclaw* (12 + 14 + 4 = 30 Punkte)

Das Quidditch-Spiel[1] Gryffindor gegen Ravenclaw steht bevor. Der Kapitän der Gryffindors hat beim Training der gegnerischen Mannschaft zugeschaut und vom Passspiel der drei Ravenclaw-Jäger Roger Davies, Jeremy Stretton und Randolph Burrow folgende Beobachtungen festgehalten:

- Wenn Stretton im Quaffelbesitz[2] ist, spielt er in genau der Hälfte aller Fälle ab, und zwar doppelt so oft zu Davies wie zu Burrow.
- Burrow behält den Quaffel mit Wahrscheinlichkeit 2/3, spielt mit Wahrscheinlichkeit 2/9 zu Stretton ab, und ansonsten zu Davies.
- Davies spielt den Quaffel immer sofort weiter, wobei er doppelt so oft zu Burrow wie zu Stretton abspielt.

a) Modellieren Sie das Passspiel der Ravenclaw-Jäger als Markov-Kette, indem Sie eine Irrfahrt des Quaffels auf den Zuständen $1 :=$ Stretton, $2 :=$ Burrow, und $3 :=$ Davies gemäß den oben beschriebenen Wahrscheinlichkeiten annehmen. Geben Sie den Graphen der Kette (mit den eingezeichneten Übergangswahrscheinlichkeiten) sowie die Übergangsmatrix an.

b) Am Anfang eines Spielzugs sei Burrow im Quaffelbesitz, d. h. es gelte $X^{(0)} = (0, 1, 0)$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt:

$$X^{(t)} = \Big(\tfrac{1}{3}\big(1 - 3^{-t}\big),\ \tfrac{1}{2}\big(1 + 3^{-t}\big),\ \tfrac{1}{6}\big(1 - 3^{-t}\big)\Big)$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich jeder der Jäger im Quaffelbesitz, wenn das Spiel unendlich lange dauert?

Aufgabe 9.3 *Karten mischen* (14 + 16 = 30 Punkte)

Alice und Bob spielen Karten mit einem Kartenstapel bestehend aus den drei Karten 1, 2, 3. Die beiden verwenden jeweils ein eigenes Mischverfahren:

- **Alice** zieht mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit eine der drei Karten aus dem Stapel und legt sie in die Mitte zwischen die anderen beiden, ohne deren Reihenfolge zu verändern.
- **Bob** zieht mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit eine der drei Karten aus dem Stapel und legt sie oben drauf.

a) Modellieren Sie beide Mischverfahren als Markov-Ketten, indem Sie jeweils den Graphen angeben und seine Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten beschriften. Benutzen Sie dazu die Zustände

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (3,1,2),\ (3,2,1),\ (2,3,1),\ (2,1,3),$$

wobei das Tripel (i, j, k) ausdrückt, dass die Karte i oben, die Karte j in der Mitte und die Karte k unten liegt. (Ordnen Sie dabei die Zustände in der obigen Reihenfolge kreisförmig an.)

b) Wir definieren ein Maß[3] m für die „Zufälligkeit“ einer Verteilung $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_6)$:

$$m(\mu) := \max\big\{|\mu_i - \mu_j| : 1 \le i < j \le 6\big\}$$

Je kleiner $m(\mu)$, desto besser mischt die Verteilung μ den Kartenstapel.

Vergleichen Sie die Qualität der Mischverfahren von Alice und Bob. Angenommen, anfangs liegen die Karten in der Reihenfolge $(1, 2, 3)$ auf dem Stapel. Mit welchem Verfahren sind die Karten besser gemischt, nach

i) einem Schritt?
ii) zwei Schritten?
iii) fünf Schritten?
iv) unendlich vielen Schritten?

Bonusaufgabe 9.4. *Produkte von Übergangsmatrizen* (15* Extrapunkte)

Seien A und B stochastische $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass $A \cdot B$ eine stochastische Matrix ist.

[1] Quidditch ist die Lieblingssportart des Zauberers Harry Potter.
[2] Der Quaffel ist ein großer Lederball, der von den Jägern in eines der gegnerischen Tore befördert werden muss.
[3] Bessere Maße für die „Zufälligkeit“ einer Verteilung sind i. A. die quadratische Abweichung $\sum_i (\mu_i - 1/n)^2$ oder die Shannon-Entropie $\sum_i \mu_i \log_2(1/\mu_i)$, die für diese Aufgabe aber unnötig kompliziert sind.