

Übungsblatt 9

Ausgabe: 14.12.17

Abgabe: 21.12.17

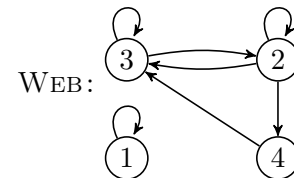
In Aufgabe 9.1 und 9.3 dürfen Sie einen Matrizenrechner (z. B. <https://matrixcalc.org/de>) als Hilfsmittel verwenden.

Aufgabe 9.1 *Peer-Review und Zufallssurfer* (8 + 8 + 4 + 6 + 14 = 40 Punkte)

Wir untersuchen den Ansatz des **Peer-Review** für den rechts dargestellten Webgraphen WEB:

- a) Zeigen Sie, dass das Tupel $PR := (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ die Page-Rank-Eigenschaft bzgl. $d = \frac{1}{2}$ besitzt.

Hinweis: Sie müssen kein lineares Gleichungssystem **lösen**, sondern nur überprüfen, ob PR eine Lösung ist.



- b) Löschen Sie die Kante (3, 3) und bestimmen Sie die Page-Ranks für den neuen Webgraphen. Welche Page-Ranks steigen, welche sinken, welche bleiben gleich? Geben Sie eine informelle Erklärung der Phänomene an.

Wir betrachten nun den Ansatz des **Zufallssurfers**.

- c) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $P_d(\text{WEB})$ mit dem Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$ für den oben dargestellten Webgraphen WEB.
- d) Gegeben sei die Übergangsmatrix einer Webkette $\mathcal{W} = (\vec{K}_3, P_d(\text{WEB}'))$ durch

$$P_d(\text{WEB}') := \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

mit dem Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$. Geben Sie den zugrundeliegenden Webgraphen WEB' an.

- e) Ein Zufallssurfer starte in Knoten 1, d. h. für die Anfangsverteilung gelte $\pi^{(0)} = (1, 0, 0)$.

Zur Erinnerung: $\pi^{(k)} = \pi^{(k-1)} \cdot P_d(\text{WEB}') = \pi^{(0)} \cdot P_d(\text{WEB}')^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$.

- i) Berechnen Sie, wo sich der Surfer mit welcher Wahrscheinlichkeit nach einem, nach zehn bzw. nach 100 Schritten aufhält, d. h. berechnen Sie $\pi^{(1)}$ bzw. $\pi^{(10)}$ und $\pi^{(100)}$. Eine auf vier Nachkommastellen gerundete Lösung genügt.
- ii) Stellen Sie eine Vermutung für den Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi^{(k)}$ auf.
- iii) Zurück zum Ansatz des Peer-Review: Berechnen Sie eine Verteilung μ mit der Page-Rank-Eigenschaft für WEB' und den Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$.

Kommentar: Der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi^{(k)}$ wird auch als Grenzverteilung bezeichnet. Später wird gezeigt, dass für „schöne“ Ketten Grenzverteilungen und Verteilungen mit der Page-Rank-Eigenschaft übereinstimmen.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.2 *Gryffindor vs. Ravenclaw*

(12 + 14 + 4 = 30 Punkte)

Das Quidditch-Spiel¹ Gryffindor gegen Ravenclaw steht bevor. Der Kapitän der Gryffindors hat beim Training der gegnerischen Mannschaft zugeschaut und vom Passspiel der drei Ravenclaw-Jäger Roger Davies, Jeremy Stretton und Randolph Burrow folgende Beobachtungen festgehalten:

- Wenn Stretton im Quaffelbesitz² ist, spielt er in genau der Hälfte aller Fälle ab, und zwar doppelt so oft zu Davies wie zu Burrow.
- Burrow behält den Quaffel mit Wahrscheinlichkeit $2/3$, spielt mit Wahrscheinlichkeit $2/9$ zu Stretton ab, und ansonsten zu Davies.
- Davies spielt den Quaffel immer sofort weiter, wobei er doppelt so oft zu Burrow wie zu Stretton abspielt.

- a) Modellieren Sie das Passspiel der Ravenclaw-Jäger als Markov-Kette, indem Sie eine Irrfahrt des Quaffels auf den Zuständen $1 := \text{Stretton}$, $2 := \text{Burrow}$, und $3 := \text{Davies}$ gemäß den oben beschriebenen Wahrscheinlichkeiten annehmen. Geben Sie den Graphen der Kette (mit den eingezeichneten Übergangswahrscheinlichkeiten) sowie die Übergangsmatrix an.
- b) Am Anfang eines Spielzugs sei Burrow im Quaffelbesitz, d. h. es gelte $X^{(0)} = (0, 1, 0)$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt:

$$X^{(t)} = \left(\frac{1}{3}(1 - 3^{-t}), \frac{1}{2}(1 + 3^{-t}), \frac{1}{6}(1 - 3^{-t}) \right)$$

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich jeder der Jäger im Quaffelbesitz, wenn das Spiel unendlich lange dauert?

Aufgabe 9.3 *Karten mischen*

(14 + 16 = 30 Punkte)

Alice und Bob spielen Karten mit einem Kartenstapel bestehend aus den drei Karten 1, 2, 3. Die beiden verwenden jeweils ein eigenes Mischverfahren:

- **Alice** zieht mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit eine der drei Karten aus dem Stapel und legt sie in die Mitte zwischen die anderen beiden, ohne deren Reihenfolge zu verändern.
- **Bob** zieht mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit eine der drei Karten aus dem Stapel und legt sie oben drauf.

- a) Modellieren Sie beide Mischverfahren als Markov-Ketten, indem Sie jeweils den Graphen angeben und seine Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten beschriften. Benutzen Sie dazu die Zustände

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 3, 1), (2, 1, 3),$$

wobei das Tripel (i, j, k) ausdrückt, dass die Karte i oben, die Karte j in der Mitte und die Karte k unten liegt. (Ordnen Sie dabei die Zustände in der obigen Reihenfolge kreisförmig an.)

- b) Wir definieren ein Maß³ m für die „Zufälligkeit“ einer Verteilung $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_6)$:

$$m(\mu) := \max \{ |\mu_i - \mu_j| : 1 \leq i < j \leq 6 \}$$

Je kleiner $m(\mu)$, desto besser mischt die Verteilung μ den Kartenstapel.

Vergleichen Sie die Qualität der Mischverfahren von Alice und Bob. Angenommen, anfangs liegen die Karten in der Reihenfolge $(1, 2, 3)$ auf dem Stapel. Mit welchem Verfahren sind die Karten besser gemischt, nach

- | | |
|---------------------|---------------------------------|
| i) einem Schritt? | iii) fünf Schritten? |
| ii) zwei Schritten? | iv) unendlich vielen Schritten? |

Bonusaufgabe 9.4. *Produkte von Übergangsmatrizen*

(15* Extrapunkte)

Seien A und B stochastische $n \times n$ -Matrizen. Zeigen Sie, dass $A \cdot B$ eine stochastische Matrix ist.

¹Quidditch ist die Lieblingssportart des Zauberers Harry Potter.

²Der Quaffel ist ein großer Lederball, der von den Jägern in eines der gegnerischen Tore befördert werden muss.

³Bessere Maße für die „Zufälligkeit“ einer Verteilung sind i. A. die quadratische Abweichung $\sum_i (\mu_i - 1/n)^2$ oder die Shannon-Entropie $\sum_i \mu_i \log_2(1/\mu_i)$, die für diese Aufgabe aber unnötig kompliziert sind.