Diskrete Modellierung

Wintersemester 2018/19

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 2

Ausgabe: 23.10.2018
Abgabe: 30.10.2018

Aufgabe 2.1 *Modellierung mit Mengen: Clash Royale* $(6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ Punkte)

Seit geraumer Zeit erfreut sich das Strategiespiel-Epos *Clash Royale* wachsender Beliebtheit. In dem Spiel treten Spieler gegeneinander an, um in Schlachten durch Ausspielen vorher gesammelter Karten die gegnerischen Türme zu zerstören.
Wir wollen hier einige Aspekte des Spiels in vereinfachter Form mithilfe von Mengen modellieren.

a) Es gibt drei verschiedene Typen von Karten: Einheitenkarten (z. B. Ritter, Hexe, Golem, ...), Zauberkarten (z. B. Feuerball, Blitz, Heilung, ...) und Gebäudekarten (z. B. Koboldhütte, Bombenturm, Kanone, ...). Manche Einheiten können *fliegen*, manche sind *Fernkämpfer*.

   Seien die Mengen $\mathbf{E}, \mathbf{Z}$ und $\mathbf{G}$ der Einheiten-, Zauber- und Gebäudekarten gegeben, sowie die Mengen $\mathbf{Flug} \subseteq \mathbf{E}$ und $\mathbf{Fern} \subseteq \mathbf{E}$. der fliegenden bzw. Fernkampf-Einheiten.

   i) Definieren Sie die Menge $\mathbf{K}$ *aller* Karten (beliebigen Typs).

   ii) Geben Sie die Menge aller Einheitenkarten an, die entweder fliegen können oder Fernkämpfer sind.

b) Jeder Spieler darf Karten sammeln. Die Menge seiner gesammelten Karten wird als *Sammlung* bezeichnet. (Jede Karte kann höchstens einmal gesammelt werden.)

   i) Definieren Sie eine Menge $\mathbf{S}$ aller (im Spiel möglichen) Sammlungen.

   ii) Welches Element in $\mathbf{S}$ drückt aus, dass Sie alle Karten gesammelt haben?

c) Der *Spielerzustand* wird charakterisiert durch die Sammlung des Spielers, die Anzahl seiner Goldmünzen (nicht mehr als 1 000 000) und seinen Königslevel (1 bis 13).

   i) Definieren Sie die Menge $\mathbf{Zust}$ aller (möglichen) Spielerzustände.

   ii) Welches Element in $\mathbf{Zust}$ gibt an, dass Sie die Karten *Ritter* und *Kanone* sowie alle Zauberkarten gesammelt haben, 1337 Goldmünzen besitzen und den Königslevel 2 erreicht haben?

d) In 13 verschiedenen Arenen $\mathbf{A} := \{1, \ldots, 13\}$ können Schlachten ausgetragen werden. Der Sieger erhält eine Belohnung in Form einer Menge von Karten sowie einer Anzahl Goldmünzen. Die Belohnung hängt dabei vom Spielerzustand sowie der Arena ab, in der die Schlacht stattfindet.

   i) Um diesen Zusammenhang durch eine Funktion $\mathbf{belohnung} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ zu modellieren, definieren Sie geeignete Mengen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$.

e) Um Karten spielen zu können, müssen sie vorher *freigeschaltet* werden. Sobald der Spieler die Arena i erreicht, werden alle Karten in der Menge $\mathbf{K}_i \subseteq \mathbf{K}$ freigeschaltet. Alle vorher bereits freigeschalteten Karten bleiben natürlich freigeschaltet.

   i) Definieren Sie die Menge $\mathbf{F}_j$ aller freigeschalteten Karten, wenn Sie die Arenen $1, 2, \ldots, j$ nacheinander erreicht haben.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.2 *Mengenoperationen* (8 + 12 = 20 Punkte)

a) Gegeben sei das Universum $U := \mathbb{N}$, die Menge $M := \{2, 6, 17, 37\}$, die Menge $N := \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ der geraden natürlichen Zahlen und die Menge $T := \{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^i : i \in \mathbb{N}\}$ der Zweierpotenzen. Geben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler Form an. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

   i) $\mathcal{P}(M \cap T)$

   ii) $(M \cap N) \times (M \setminus \{37, 47\})$

   iii) $\bigcup_{x \in T} \big(\{x+1\} \cap M\big)$

   iv) $\mathcal{P}\big(\{2^2, 3^3\}^2 \setminus U^2\big)$

b) Gegeben sei ein Universum U sowie *beliebige* Mengen $A, B \subseteq U$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

   i) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

   ii) Aus $A \backslash B = B \backslash A$ folgt $A = B$.

Aufgabe 2.3 *Funktionen* (12 + 12 = 24 Punkte)

a) Betrachten Sie folgende Funktionen:

   i) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $z \mapsto \log_2(2^{|z|})$

   ii) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \frac{-n-1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$

   iii) $f_3 : \{0,1\}^4 \to \{0, 1, \dots, 15\}$ mit $(a, b, c, d) \mapsto 8a + 4b + 2c + d$

   iv) $f_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $(n, m) \mapsto \{n, m\}$

   Geben Sie für jede der obigen Funktionen f_i an, ob sie injektiv ist **und** ob sie surjektiv ist. Geben Sie für jede nicht-injektive Funktion f_i zwei Elemente $x, y \in \mathrm{Def}(f_i)$, sodass $x \neq y$ und $f_i(x) = f_i(y)$ gilt. Geben Sie für jede nicht-surjektive Funktion f_i ein Element x aus dem Bildbereich an, sodass $x \notin \mathrm{Bild}(f_i)$ gilt. Welche der obigen Funktionen sind bijektiv, welche nicht?

   Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

b) Seien A, B und C beliebige Mengen und $f : A \to B$ sowie $g : B \to C$ beliebige Funktionen. Wir definieren die Funktion $h \colon A \to C$ als die *Verkettung* von f und g durch

$$h(a) := g(f(a)) \quad \text{f.a. } a \in A.$$

   i) Widerlegen Sie: Falls h injektiv ist, dann ist g injektiv.

   ii) Beweisen Sie: Falls h injektiv ist, dann ist f injektiv.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4 *Relationale Datenbanken* ((4+4+8) + (5+5) = 26 Punkte)

Relationale Datenbanken speichern *Datensätze* als Zeilen von Tabellen, die mithilfe von SQL abgefragt werden können. Formal handelt es sich bei den Tabellen um Relationen und bei den Datensätzen um alle Tupel, die zur Relation gehören.

Definition. Für ein Tupel $x := (x_1, \dots, x_n)$ bezeichne x_i die i-te Komponente von x. Für eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ entsteht das Tupel $(x_i : i \in I)$ aus x, indem alle Komponenten x_j mit $j \notin I$ gelöscht werden.

Seien R_1, R_2 und R_3 Relationen mit Stelligkeiten k, ℓ bzw. ℓ. Wir betrachten folgende *Operatoren*:

$$\begin{aligned}
S_E(R_1) &:= \{x \in R_1 \ : \ E(x) \text{ ist wahr}\} \subseteq R_1 && \text{„Selektion nach Eigenschaft } E\text{“}\\
R_1 \otimes R_2 &:= \{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}) \ : && \text{„Kartesisches Produkt“}^1\\
&\qquad (x_1, \dots, x_k) \in R_1 \text{ und } (x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}) \in R_2\}\\
R_2 \cup R_3 &:= \{x \ : \ x \in R_2 \text{ oder } x \in R_3\} && \text{„Vereinigung“}\\
\pi_I(R_1) &:= \{(x_i : i \in I) \ : \ x \in R_1\} && \text{„Projektion auf } I \subseteq \{1, \dots, k\}\text{“}
\end{aligned}$$

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen nötig.

a) Die Relationen *Fragen*, *Antworten* und *Witze* sind unten gegeben. Bestimmen Sie die Relationen, die durch die folgenden Ausdrücke gegeben sind, in extensionaler Notation.
   i) $S_{x_2=\text{en}}(\text{Antworten})$
   ii) $\pi_{\{2\}}(\text{Fragen} \cup \text{Antworten})$
   iii) $\pi_{\{3,9\}}\big(S_{x_1=x_4 \text{ und } x_5=x_7 \text{ und } x_6>60}\big((\text{Fragen} \otimes \text{Witze}) \otimes \text{Antworten}\big)\big)$

b) Seien R_1 und R_2 beliebige 2-stellige Relationen. Mithilfe der oben definierten Operatoren lassen sich neue Operatoren ausdrücken. Beispielsweise kann der „Rückwärts“-Operator ρ, der die Reihenfolge der Komponenten der Tupel umkehrt, durch $\rho(R_1) := \pi_{\{2,3\}}(R_1 \otimes R_1)$, d. h. mithilfe der Operatoren $\otimes$ und π, ausgedrückt werden.

   i) Drücken Sie $R_1 \setminus R_2 := \{x \in R_1 : x \notin R_2\}$ mithilfe des Selektionsoperators S und einer geeigneten Eigenschaft E aus.
   ii) Drücken Sie $R_1 \oplus R_2 := \{x : x \in R_1 \setminus R_2 \text{ oder } x \in R_2 \setminus R_1\}$ mithilfe der Operatoren $\cup$ und $\setminus$ aus.
   Hinweis: Sie dürfen den Operator $\setminus$ auch benutzen, wenn Sie Teilaufgabe i) nicht gelöst haben.

Kommentar: In SQL werden die Operatoren S, $\otimes$, $\cup$ und π durch die Schlüsselwörter WHERE (Selektion), FROM (kartesisches Produkt), UNION (Vereinigung) und SELECT (Projektion) dargestellt.

Relation „Fragen“

1: F_ID	2: F_Sprache	3: F_Text
1	de	Warum ging das Huhn über die Straße?
2	en	How do you call eight hobbits?
3	en	Why aren't jokes funny in octal?
5	de	Was ist ein Polarbär?
6	de	Welches Tier kann rechnen?

Relation „Witze“

1: WF_ID	2: WA_ID	3: Likes
1	2	56
1	5	10
2	3	59
3	4	83
6	7	71
5	8	12

Relation „Antworten“

1 : A_ID	2 : A_Sprache	3: A_Text
2	de	Weil es auf die andere Seite wollte.
3	en	A hobbyte.
4	en	Because 7 10 11.
5	de	Zwischenwertsatz.
6	de	Übungsaufgabe.
7	de	Ein Oktoplus.
8	de	Ein rechteckiger Bär nach der Koordinatentransformation.
9	fr	Théorème des valeurs intermédiaires.

[1] Wir haben hier ein anderes Symbol für das kartesische Produkt $\otimes$ verwandt. Beachten Sie den formalen Unterschied: $R_1 \times R_2 = \{((x_1, \dots, x_k), (x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell})) \ : \ (x_1, \dots, x_k) \in R_1 \text{ und } (x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}) \in R_2\} \neq R_1 \otimes R_2$.