Diskrete Modellierung

Wintersemester 2018/19

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 4

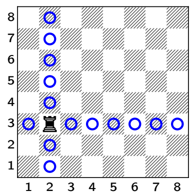
Ausgabe: 06.11.2018
Abgabe: 13.11.2018

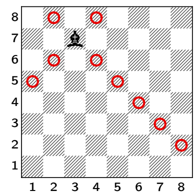
Aufgabe 4.1 *Das n-Läufer-und-Türme-Problem* $(4 + (4{+}6{+}6{+}4{+}4) + 6 + 4 = 38$ Punkte$)$

Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sollen *Türme* und *Läufer* auf einem $n \times n$-Schachbrett so platziert werden, dass sie sich nicht gegenseitig *bedrohen*, d. h. keine Figur soll eine andere Figur schlagen können. Außerdem muss in jeder Spalte und in jeder Zeile mindestens eine Figur stehen und es muss insgesamt mindestens einen Läufer und mindestens einen Turm geben. Natürlich kann auf jedem Feld höchstens eine Figur stehen. Eine Platzierung gemäß dieser Regeln bezeichnen wir als *Lösung* des n-Läufer-und-Türme-Problems.

Zur Erinnerung: Ein Turm darf beliebig viele Felder in horizontale oder vertikale Richtung ziehen. Ein Läufer darf beliebig viele Felder in diagonale Richtung ziehen.

Abbildung 1: Zwei 8×8-Schachbretter. Der Turm auf $(3, 2)$ auf dem linken Brett bedroht alle blau markierten Felder. Der Läufer auf $(7, 3)$ auf dem rechten Brett bedroht alle rot markierten Felder.





a) Besitzt das n-Läufer-und-Türme-Problem für $n = 3$ bzw. $n = 4$ eine Lösung?

b) Modellieren Sie das n-Läufer-und-Türme-Problem durch aussagenlogische Formeln. Verwenden Sie im Folgenden für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die aussagenlogische Variable $\mathbf{T}_{i,j}$ mit der Bedeutung „auf dem Feld (i, j) in Zeile i und Spalte j steht ein Turm“ sowie die Variable $\mathbf{L}_{i,j}$ mit der Bedeutung „auf dem Feld (i, j) in Zeile i und Spalte j steht ein Läufer“.

Geben Sie jeweils auch eine kurze umgangssprachliche **Erläuterung** Ihrer Formeln an.

Hinweis: Notationen wie $\bigvee_{i=1}^{n}(\ldots)$, $\bigwedge_{i=1}^{n}(\ldots)$ oder $\bigwedge_{(i,j)\in\ldots}(\ldots)$ und Beispiel 3.48 (Sudoku) aus dem Skript können hilfreich sein.

i) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{Höchstens}_{i,j}$, die aussagt, dass auf dem Feld (i, j) höchstens eine Schachfigur steht.

ii) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{Turm}_{i,j}$, die aussagt: „wenn ein Turm auf dem Feld (i, j) steht, darf in Zeile i und Spalte j keine weitere Schachfigur stehen“.

iii) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{Läufer}_{i,j}$, die aussagt: „wenn ein Läufer auf dem Feld (i, j) steht, darf in den Diagonalen des Feldes (i, j) keine weitere Schachfigur stehen“.

iv) Konstruieren Sie Formeln Zeile_i bzw. Spalte_j, die aussagen, dass in Zeile i bzw. Spalte j mindestens eine Schachfigur steht.

v) Konstruieren Sie eine Formel $\mathsf{Mindestens}$, die aussagt, dass mindestens ein Läufer und mindestens ein Turm auf dem Schachbrett stehen.

c) Geben Sie eine Formel φ_n an, sodass die erfüllenden Belegungen von φ_n genau den Lösungen des n-Läufer-und-Türme-Problems entsprechen.

d) Geben Sie eine zu φ_n äquivalente Formel ψ_n in KNF an.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.2 *Mit Normalformen arbeiten* ($3{\times}3 + 10 + 10 = 29$ Punkte)

a) Ohne Begründung: Entscheiden Sie für jede der folgenden Formeln φ_i, ob sie in disjunktiver Normalform (DNF) bzw. in konjunktiver Normalform (KNF) vorliegt.

i) $\varphi_1 := (A \wedge B) \vee C$ ii) $\varphi_2 := A \wedge \neg(B \vee \neg C)$ iii) $\varphi_3 := A \wedge \neg B \wedge C$

Hinweis: DNF und KNF schließen sich nicht gegenseitig aus.

b) Gegeben sei die Formel $\psi := (A \to \neg B) \wedge (\neg B \oplus C) \wedge A$.

i) Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel κ in KNF an.

ii) Geben Sie eine zu $\neg\psi$ äquivalente Formel δ in DNF an.

c) i) Geben Sie eine zu $\varphi := X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ äquivalente Formel φ' in KNF an.

ii) Geben Sie eine zu $\chi := X_1 \leftrightarrow X_2 \leftrightarrow X_3$ äquivalente Formel χ' in DNF an.

In b) und c) genügt eine kurze Herleitung.

Bitte wenden!

Verwenden Sie für Aufgabe 4.3 die Python-Bibliothek SymPy, die unter http://live.sympy.org/ als Webanwendung abrufbar ist. Alternativ können Sie auch Jupyter Notebook (https://try.jupyter.org/) verwenden. Machen Sie sich mithilfe der Bemerkungen 3.27 und 3.33 im Skript mit SymPy vertraut.

Aufgabe 4.3 *Modellierung und SymPy: Zaubertränke* ($8+9+2+4+10=33$ Punkte)

Als Mary Modder nach ausgiebigem Trödeln eine gute Viertelstunde zu spät zum Zaubertrankunterricht erscheint, erwartet sie eine Überraschung. Wie der Zaubertranklehrer Prof. Hornslug ihr mitteilt, haben ihre acht Mitschüler im Rahmen eines Selbstversuchs jeweils einen Trank zu sich genommen – und zwar entweder einen Wahrheitstrank (Veritaserum) oder einen Lügentrank (Mendacioserum). Wer einen solchen Trank genommen hat, sagt stets die Wahrheit bzw. lügt stets.

Als Strafe für das Zuspätkommen muss Mary herausfinden, wer welchen Trank genommen hat. Prof. Hornslug gibt ihr noch einen **Tipp**: *„Die Anzahl der Schüler, die Mendacioserum getrunken haben, ist ungerade.“*

Nehmen Sie an, dass jeder Schüler entweder Veritaserum bekommen hat und daher immer die Wahrheit sagt oder Mendacioserum bekommen hat und daher immer lügt. Gehen Sie außerdem davon aus, dass jeder Schüler genau weiß, wer welchen Trank getrunken hat.

Marys Mitschüler teilen ihr Folgendes mit:

- Alicia sagt: *„Wenn Blaise Mendacioserum getrunken hat, dann hat George Veritaserum getrunken.“*
- Blaise sagt: *„Ich habe Veritaserum getrunken, aber Dean trank Mendacioserum.“*
- Colin sagt: *„Weder Alicia noch Blaise haben Veritaserum getrunken.“*
- Dean sagt: *„Fred und Blaise haben unterschiedliche Tränke getrunken.“*
- Ernie sagt: *„Ich habe denselben Trank wie Alicia getrunken.“*
- Fred sagt: *„Nur wenn Hermine Veritaserum getrunken hat, hat auch Alicia Veritaserum getrunken.“*
- George sagt: *„Mindestens ein Schüler hat Mendacioserum getrunken. “*
- Hermine sagt: *„Entweder Colin hat Veritaserum getrunken oder sowohl Fred als auch George tranken Mendacioserum.“*

Benutzen Sie die Variablen $\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{h}$ mit den Bedeutungen „Alicia hat Veritaserum getrunken“, ..., „Hermine hat Veritaserum getrunken“.

In den Teilen a) bis c) sind keine Begründungen nötig, geben Sie aber in Teil b) und c) Ihren Quelltext an.

a) i) Formalisieren Sie die Aussagen von Marys Mitschülern durch aussagenlogische Formeln $\varphi_a, \varphi_b, \ldots, \varphi_h$.
   Hinweis: Beispielsweise können Sie Alicias Aussage formalisieren durch $\varphi_a := (\mathbf{a} \leftrightarrow (\neg\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{g}))$.

   ii) Formalisieren Sie den Tipp von Prof. Hornslug (der natürlich der Wahrheit entspricht) durch eine Formel φ_t.

b) Definieren Sie SymPy-Variablen `a`, `b`, ..., `h`. Übersetzen Sie dann die obigen Formeln in SymPy-Formeln `phia`, `phib`,..., `phih`, `phit`.

   Hinweis: Verwenden Sie nur Kleinbuchstaben als Variablen.

c) Stellen Sie eine SymPy-Formel `xi` auf, sodass die erfüllenden Belegungen widerspiegeln, wer welchen Trank genommen hat.

   Hinweis: Wenn Sie alles richtig gemacht haben, besitzt `xi` genau eine erfüllende Belegung.

d) Finden Sie heraus, wer welchen Trank getrunken hat.

e) *„Ich Esel“*, sagt Prof. Hornslug zur Klasse, *„ich glaube, ich habe tatsächlich die beiden Tränke vertauscht, als ich sie in eure Becher gefüllt habe. Jeder, der dachte, er hätte Veritaserum bekommen, hat tatsächlich Mendacioserum bekommen – und umgekehrt. Oder kann das gar nicht sein und es ist doch alles richtig? Mary, kannst du mir weiterhelfen?“*

   Finden Sie heraus, ob Prof. Hornslug die Tränke vertauscht haben könnte. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.