Diskrete Modellierung

Wintersemester 2018/19

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

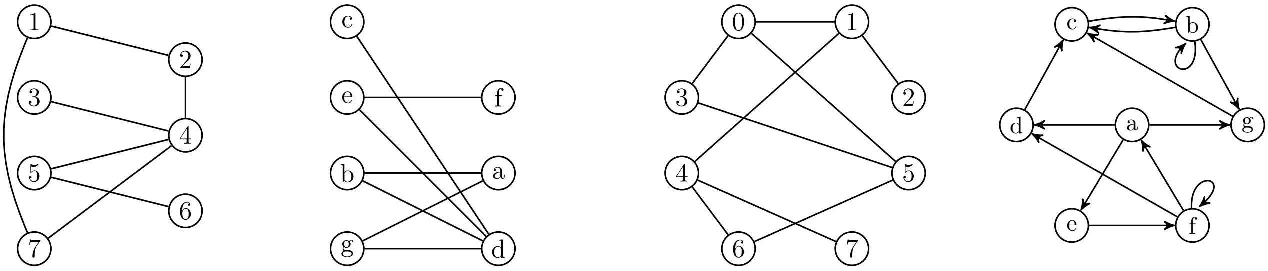
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 7

Ausgabe: 27.11.18
Abgabe: 04.12.18

Aufgabe 7.1 *Grundbegriffe der Graphentheorie* $(12 + 3 + 3 + 6 = 24$ Punkte$)$

Die Graphen G_1, G_2, G_3 und G_4 seien wie folgt in grafischer Darstellung gegeben.



G_1 G_2 G_3 G_4

a) In den Teilaufgaben i) bis iv) sind keine Begründungen verlangt.

i) Geben Sie eine Färbung von G_1 mit möglichst wenigen Farben an.

ii) Geben Sie ein perfektes Matching für G_3 an.

iii) Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten von G_4 an.

iv) Geben Sie einen Isomorphismus $\pi : \{1, 2, \dots, 7\} \to \{a, b, \dots, g\}$ von G_1 nach G_2 an.

b) Ist G_1 bipartit? Eine kurze Begründung genügt.

c) Ist G_3 planar? Eine kurze Begründung genügt.

d) i) Besitzt G_1 einen Hamiltonweg? ii) Besitzt G_1 einen Eulerweg?

Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Weg an; falls nein, wieso nicht?

Hinweis: Welche Rolle spielen die Knoten 3 und 6?

Aufgabe 7.2 *Färbbarkeit planarer Graphen* (25 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Knoten: Jeder planare ungerichtete Graph $G = (V, E)$ lässt sich mit sechs (oder weniger) Farben färben.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden: In jedem (nichtleeren) planaren Graphen G gibt es einen Knoten v mit $\text{Grad}_G(v) \leq 5$.

Kommentar: Tatsächlich lässt sich jeder planare Graph sogar mit nur vier Farben färben, der Beweis hierfür ist allerdings deutlich aufwendiger.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3 *Modellierung mit Konfliktgraphen* (8 + 8 + 8 = 24 Punkte)

Der Frankfurter Fußballverein *1. FC Haudruff* hat acht untereinander konkurrierende Fanclubs.

- Kategorie A[1]: die **F**rankfurter Fußballfreunde, die **B**onameser Ballsportgemeinschaft und die **R**ödelheimer Rasselbande
- Kategorie B: die **P**raunheimer Pöbler, die **G**innheimer Ganoven und die **D**ornbusch-Deppen
- Kategorie C: die **S**eckbacher Schnauzenhauer und die **K**rawallos Kalbach

Da einige Fans dem Namen des Vereins in der Vergangenheit leider alle Ehre machten, müssen die Fanclubs in unterschiedliche (durch Zäune getrennte) Blöcke des Stadions eingeteilt werden. Dabei ist Folgendes zu beachten:

1. Die Seckbacher Schnauzenhauer dürfen natürlich nicht mit den Krawallos Kalbach in denselben Block eingeteilt werden, sonst ist der Krawall vorprogrammiert.
2. Die Frankfurter Fußballfreunde sind mit allen anderen Fanclubs gut befreundet, da sie das gesamte Stadtgebiet durch ihre fröhlichen Gesänge repräsentieren.
3. Zwischen der Bonameser Ballsportgemeinschaft und den Krawallos Kalbach herrscht seit jeher ein angespanntes Verhältnis, da die U-Bahn-Station Kalbach auf Bonameser Gebiet liegt. Das kann ja wohl nicht wahr sein!
4. Jeder Fanclub der Kategorie B soll sich sicherheitshalber von den Seckbacher Schnauzenhauer und den Krawallos Kalbach fernhalten, da sonst die Emotionen hochkochen.
5. Jedes mal, wenn die Rödelheimer Rasselbande auf die Bonameser Ballsportgemeinschaft, die Ginnheimer Ganoven oder die Krawallos Kalbach trifft, gibt es Streit, weil sich die Rödelheimer über den schiefen Gesang und die verhunzte Stadionchoreografie der anderen beschweren. Die Rödelheimer Rasselbande muss daher auf jeden Fall von den drei anderen separiert werden.

Ansonsten kommen alle Fanclubs gut miteinander aus.

a) Modellieren Sie die Situation im Stadion durch einen Konfliktgraphen. Repräsentieren Sie die Fanclubs dabei durch die Knoten **B**, **D**, **F**, **G**, **K**, **P**, **R** und **S**. Eine Kante zwischen zwei Knoten zeigt an, dass die entsprechenden Fanclubs nicht in denselben Block eingeteilt werden dürfen. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

b) Geben Sie eine Einteilung der Fanclubs in eine kleinstmögliche Anzahl von Blöcken an, sodass innerhalb der Blöcke keine Konflikte auftreten. Begründen Sie, wieso weniger Blöcke nicht möglich sind. Welches graphentheoretische Problem steckt dahinter?

c) Nach dem Spiel möchte die Polizei die acht Fanclubs nacheinander in Richtung Bahnhof leiten. Damit es dabei ruhig und friedlich bleibt, soll es zwischen aufeinanderfolgenden Fanclubs keinen der oben genannten Konflikte geben.

   Ist das Vorhaben der Polizei möglich? Welches graphentheoretische Problem steckt dahinter?

   Hinweis: Betrachten Sie den Freundschaftsgraphen, d.h. den Komplementgraphen des Konfliktgraphen.

Bitte wenden!

[1] siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Zentrale_Informationsstelle_Sporteins%C3%A4tze#Kategorien

Aufgabe 7.4 *Rechnernetzwerke als ungerichtete Graphen* (9 + 18 = 27 Punkte)

Sie bekommen die Aufgabe, eine Menge von n Rechnern zu vernetzen. Ihr Auftraggeber stellt folgende Anforderungen an das Netzwerk:

1. An jedem Rechner dürfen höchstens acht Leitungen angeschlossen werden.
2. Von jedem Rechner muss jeder andere Rechner über einen Leitungsweg erreichbar sein, wobei höchstens $\frac{n}{3}$ andere Rechner auf diesem Weg liegen dürfen.
3. Wenn genau eine Leitung ausfällt, müssen alle Rechner immer noch über irgendeinen Leitungsweg miteinander verbunden sein.

Dabei können auf einer (nicht ausgefallenen) Leitung Daten in beide Richtungen gesendet werden. Ein solches Netzwerk lässt sich als ungerichteter Graph darstellen: Ein Knoten repräsentiert einen Rechner und eine Kante repräsentiert eine Leitung.

a) Übersetzen Sie die obigen drei Anforderungen in Eigenschaften ungerichteter Graphen $G=(V,E)$.

Beispiel: Die Anforderung „Im Rechnernetz darf es insgesamt nicht mehr als k Leitungen geben“ lässt sich übersetzen in „$|E| \leq k$“ oder „G besitzt höchstens k Kanten“.

b) Prüfen Sie, welche der verlangten Eigenschaften die Netzentwürfe haben, die durch die unten definierten Graphen repräsentiert werden, und welche nicht. Geben Sie jeweils auch eine **Skizze** des Graphen an und begründen Sie Ihre Antworten.

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade mit $n \geq 10$ und $V := \{1, \ldots, n\}$.

i) $G_1 = (V, E_1)$ mit $E_1 = \big\{\{1, i\} : 2 \leq i \leq n\big\}$

ii) $G_2 = (V, E_2)$ mit $E_2 = \big\{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\big\} \cup \big\{\{1, n\}\big\}$

iii) $G_3 = (V, E_3)$ mit $E_3 = E_2 \cup \big\{\{i, i + \frac{n}{2}\} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\big\}$

Bonusaufgabe 7.5 *Größtmögliche Matchings und augmentierende Wege* (10 + 15 Extrapunkte)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Matching $M \subseteq E$. Wir möchten herausfinden, ob es möglich ist, aus M ein größeres Matching zu bauen und führen dazu den Begriff eines *augmentierenden Weges* ein. Sei $w := (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ ein einfacher Weg in G mit ungerader Länge, und sei ferner $e_i := \{v_{i-1}, v_i\}$ die i-te Kante des Weges w.

Wir nennen w einen *augmentierenden Weg* für M, wenn die Kanten $e_1, e_2, \ldots e_k$ abwechselnd in $E \setminus M$ und M liegen (beginnend und endend mit $E \setminus M$), und der Anfangs- und der Endknoten v_0 bzw. v_k in keiner Kante von M liegen, d. h. wenn gilt:

$$\{e_1, e_3, e_5, \ldots, e_k\} \subseteq E \setminus M \quad \text{und} \quad \{e_2, e_4, e_6, \ldots, e_{k-1}\} \subseteq M \quad \text{und} \quad v_0, v_k \notin e \text{ f.a. } e \in M.$$

a) Zeigen Sie: Wenn M ein größtmögliches Matching in G ist, dann gibt es keinen augmentierenden Weg für M.

Hinweis: Indirekter Beweis. Betrachten Sie die Menge $M' := M \oplus \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Zeigen Sie, dass M' ein größeres Matching ist.

b) Zeigen Sie: Wenn es keinen augmentierenden Weg für M gibt, dann ist M ein größtmögliches Matching in G.

Hinweis: Indirekter Beweis. Nehmen Sie an, das Matching M^* wäre größer als M, und suchen Sie im Graphen mit der Kantenmenge $M^* \cup M$ einen augmentierenden Weg für M.

Kommentar: Auf dem Prinzip augmentierender Wege basieren die meisten Matching-Algorithmen. Die Schwierigkeit liegt darin, augmentierende Wege zu finden.

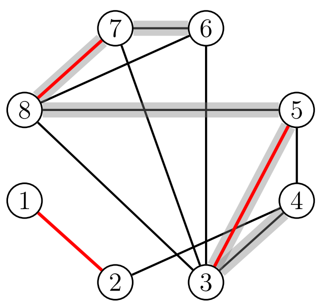
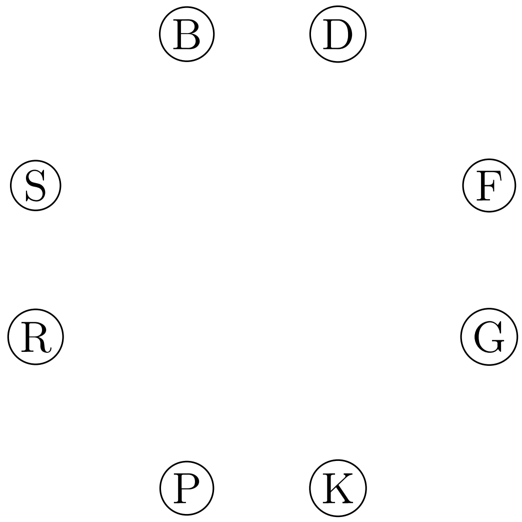


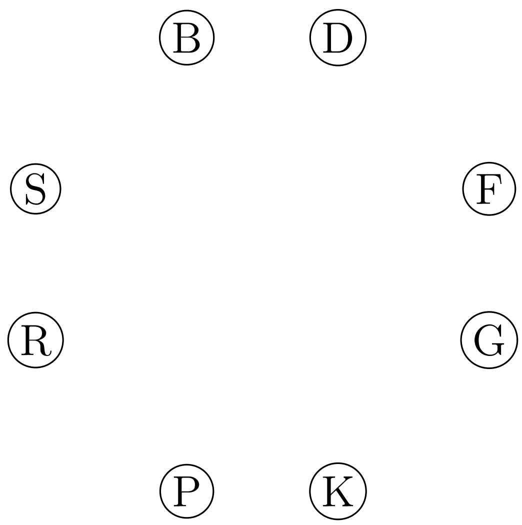
Abb. 1: Ein Graph mit einem Matching $M = \{\{1,2\},\{3,5\},\{7,8\}\}$ (rot markiert) und dem augmentierendem Weg $w = (4,3,5,8,7,6)$ für M (grau hinterlegt). Die Weg-Kanten $\{3,5\}, \{7,8\}$ liegen in M, die Weg-Kanten $\{4,3\}, \{5,8\}, \{6,7\}$ hingegen nicht, und keine Kante von M berührt die Knoten 4 und 6.

Bitte wenden!

Anhang zu Aufgabe 7.3



Konfliktgraph



Freundschaftsgraph