

Fragensammlung

20. Dezember 2018

Wenn Sie die folgenden Fragen ohne Hilfe und Blick ins Skript beantworten können, dürfen Sie nachts *besonders* ruhig schlafen.
Die Liste ist natürlich nicht vollständig. Bestimmt haben wir das eine oder andere Thema vergessen. Das heißt aber nicht, dass wir es unwichtig finden! Sie sind herzlich dazu eingeladen, eigene Frage-Antwort-Listen zu entwerfen.

Inhalt

Mengenlehre und mathematische Grundlagen	1
Aussagenlogik	2
Beweismethoden	2
Graphen und Bäume	3
Markov-Ketten und Page-Rank	3

Mengenlehre und mathematische Grundlagen

- a) Für Mengen M, N , wann gilt $M \subseteq N$, wann $M \in N$?
- b) Für eine Menge N , wie sieht $\mathcal{P}(N)$ aus?
- c) Gilt für jede Menge M : $\emptyset \subseteq M$? $\emptyset \in M$? $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(M)$? $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$?
- d) Sei A eine Menge. Gilt $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?
- e) Was ist die Menge $\text{Abb}(A, B)$ und welche Kardinalität besitzt sie bei endlichen A und B ?
- f) Wie verhält sich die Kardinalität einer Menge A zur Kardinalität ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$?
- g) Welche bzw. wie viele Elemente enthält $M \times N$?
- h) Was ist eine Relation? Was ist eine Funktion?
- i) Wann ist eine Funktion surjektiv, wann injektiv, wann bijektiv?
- j) Ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Was ist das Bild von f ?
- k) Falls es eine injektive Funktion $f: A \rightarrow B$ gibt, was lässt sich über die Kardinalitäten von A und B sagen?
- l) Können Sie eine bijektive Funktion $b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ angeben?

Aussagenlogik

- a) Wie ist die Menge AL definiert?
- b) Wie übersetzt man Umgangssprache in Aussagenlogik?
- c) Was ist eine Belegung \mathcal{B} ? Was ist $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}}$ für eine Formel φ ?
- d) Wann ist eine Formel φ erfüllbar, falsifizierbar, allgemeingültig, unerfüllbar?
- e) Wie viele Zeilen hat die Wahrheitstafel einer Formel φ mit n Variablen?
- f) Wie zeigt man eine semantische Folgerung oder Äquivalenz?
- g) Gilt $((x \rightarrow y) \rightarrow x) \models (x \rightarrow (y \rightarrow x))$?
- h) Wie bestimmt man eine DNF, wie eine KNF?
- i) Wie sehen DNF und KNF für die Formel $\varphi = (A \wedge (B \leftrightarrow C))$ aus?
- j) Wie modelliert man logische Puzzles à la Sudoku?
- k) Wie sieht eine Formel φ aus, die besagt, dass in jeder Zeile eines Schachbretts genau ein Turm steht?
- l) Was ist der Zweck der Resolution und wie setzt man sie ein?
- m) Können Sie mit Resolution aus der Menge $\{\{Q, T\}, \{-P, Q\}, \{-Q, R\}, \{-R, T\}, \{-T, P\}, \{-P, \neg R\}\}$ den leeren Disjunktionsterm ϵ herleiten?
- n) Ist die Formel $\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg b)$ erfüllbar?
- o) Wem gehört der Fisch?

Beweismethoden

- a) Welche Beweismethoden kennen Sie aus der Vorlesung und wie wendet man sie an?
- b) Wo liegt der Fehler in folgendem „Beweis“?
Zu zeigen: $1 = 2$.
Beweis: Angenommen, es gilt $1 = 2$. Wir subtrahieren auf beiden Seiten eine Eins und erhalten $0 = 1$. Nun multiplizieren wir beide Seiten mit Null und erhalten die wahre Aussage $0 = 0$. Somit ist gezeigt, dass $1 = 2$ gilt. □
- c) Wie funktioniert die Cantorsche Diagonalisierung? Was lässt sich damit zeigen?
- d) Wie zeigt man eine Äquivalenz „ \iff “?
- e) Wann kann man ein Gegenbeispiel als Beweis benutzen?
- f) Was darf man im Induktionsschritt benutzen?
- g) Zeigen Sie per Induktion: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.
- h) Wie weist man Eigenschaften rekursiv definierter Funktionen nach?
- i) Wie sehen Induktionsanfang und -schritt aus, wenn man Eigenschaften über die Fibonacci-Zahlen nachweist?
- j) Zeigen Sie $x_k = 3^k$ f.a. $k \in \mathbb{N}$, wobei $x_0 := 1$, $x_1 := 3$ und $x_k := 5x_{k-1} - 6x_{k-2}$ f.a. $k \geq 2$ gelte.
- k) Welchen Wert hat $\sum_{i=0}^n a^i$ mit $a \neq 1$?
- l) Wieso gibt es manchmal mehrere Induktionsanfänge?

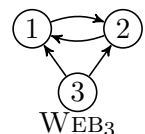
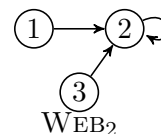
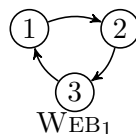
Graphen und Bäume

- Worin unterscheiden sich gerichtete und ungerichtete Graphen?
- Was ist der Grad eines Knotens? Was ist ein (einfacher) Kreis?
- Was ist ein Hamiltonweg/-kreis? Was ist ein Eulerweg/-kreis? Welcher ist i. A. schwieriger zu finden?
- Wahr oder falsch: Wenn G einen Euler-/Hamiltonkreis enthält, dann ist G (stark) zusammenhängend.
- Was ist ein Matching? Was ist ein perfektes Matching?
- Was sagt die chromatische Zahl eines Graphen aus?
- Was ist eine Färbung? Wie viele Farben reichen aus, um einen planaren Graphen zu färben?
- Wie viele Kanten haben der vollständige Graph K_n und der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$?
- Welche chromatische Zahl besitzt der Graph K_n , welche besitzt der Graph $K_{m,n}$?
- Besitzt der Graph $K_{100,200}$ einen Hamiltonweg?
- Was ergibt $\sum_{v \in V} \text{Grad}_G(v)$?
- Gibt es einen (un)gerichteten Graphen mit 243 Knoten und 29403 Kanten?
- Wahr oder falsch: G ist genau dann bipartit, wenn $\chi(G) \leq 2$.
- Zeigen Sie: Wenn $G = (V, E)$ einen Hamiltonweg besitzt und $|V|$ gerade ist, dann besitzt G ein perfektes Matching.
- Was ist ein ungerichteter Baum? Was ist ein gewurzelter Baum? Was ist ein Wald?
- Wahr oder falsch: Jeder ungerichtete Graph hat einen Spannbaum.
- Wie hoch kann ein Baum mit n Knoten mindestens/höchstens sein?
- Wie viele Blätter besitzt ein vollständiger k -ärer Baum der Tiefe t ?
- Wie modelliert man Zwei-Personen-Spiele mit Bäumen? Was ist eine Gewinnstrategie?
- Wie führt man Induktionsbeweise über Graphen oder Bäume?
- Zeigen Sie ohne ins Skript zu schauen: Für jeden nicht-leeren Baum $B = (V, E)$ gilt $|E| = |V| - 1$.

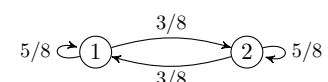
Markov-Ketten und Page-Rank

- Wie sieht die Definition des (alten) Page-Rank PR aus der Perspektive des Peer-Reviews aus?
- Wie ändern sich die Page-Ranks, wenn der Dämpfungsfaktor erhöht bzw. verringert wird?
- Ordnen Sie folgende Page-Rank-Vektoren (bzgl. $d = \frac{1}{2}$) jeweils einem der drei Webgraphen zu.

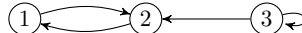
- $\text{PR} = \frac{1}{12} (5, 5, 2)$
- $\text{PR}' = \frac{1}{3} (1, 1, 1)$
- $\text{PR}'' = \frac{1}{6} (1, 4, 1)$



- Wie sieht die Definition des (neuen) Page-Rank PR^* aus der Perspektive des Zufallssurfers aus?
- Warum benötigen wir den Dämpfungsfaktor?
- Was ist eine stochastische Matrix, was ist eine Verteilung?
- Wenn eine Markov-Kette aktuell die Verteilung x besitzt, welche Verteilung besitzt sie nach einem Schritt? Welche Verteilung besitzt sie nach k Schritten?
- Zeigen Sie für die folgende Kette per vollständiger Induktion:
Wenn $\pi^{(0)} = (1, 0)$, dann gilt $\pi^{(k)} = \frac{1}{2}(1 + 4^{-k}, 1 - 4^{-k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$.



i) Wann ist ein Graph G irreduzibel bzw. aperiodisch? Wann ist eine Markov-Kette ergodisch?

j) Ist die folgende Kette irreduzibel, aperiodisch, ergodisch? 

k) Geben Sie einen Graphen an, der irreduzibel, aber nicht aperiodisch ist; und einen, der aperiodisch, aber nicht irreduzibel ist.

l) Was *bedeutet* Ergodizität?

m) Gibt es eine Markov-Kette, die eine eindeutige Grenzverteilung hat, aber nicht ergodisch ist?

n) Was hat die Grenzverteilung einer ergodischen Kette mit ihrer Übergangsmatrix zu tun?

o) Was ist eine stationäre Verteilung einer Markov-Kette, und wie berechnet man sie?

p) Wie viele stationäre Verteilungen besitzt eine Markov-Kette mindestens, wie viele höchstens? Wie viele stationäre Verteilungen besitzt eine ergodische Markov-Kette?

q) Berechnen Sie alle stationären Verteilungen von 

r) Wie sehen die stationären Verteilungen von symmetrischen Ketten, Irrfahrten auf ungerichteten Graphen, Warteschlangen und der Gambler's-Ruin-Kette aus?

s) Weisen Sie nach, dass die Binomialverteilung eine stationäre Verteilung der Ehrenfest-Kette ist.