Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Georg Schnitger

4. April 2019

Diskrete Modellierung (SoSe 19)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

⇓ BITTE GENAU BEFOLGEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind in dieser Klausur keine Hilfsmittel erlaubt. Das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel stellt eine Täuschung dar und führt zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur. Schalten Sie insbesondere Ihre Handys und Smartwatches vor Beginn der Klausur aus.
- Legen Sie Ihre Goethe-Card deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir während der Klausur Ihre Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur alle von 2 bis 15 durchnummerierten Seiten enthält.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Notfalls können Sie auch die beigefügten Zusatzblätter am Ende der Klausur benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich. Wenn Sie Lösungen auf Zusatzblättern notieren, vermerken Sie dies bitte deutlich bei den jeweiligen Aufgabenstellungen.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung diese verlangt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.
- Schreiben Sie ausschließlich mit einem dokumentenechten blauen oder schwarzen Stift. Verwenden Sie keinen Bleistift, kein Tipp-Ex, keinen radierbaren Kugelschreiber oder löschbaren Füller.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Ihre durch die Übungsaufgaben im WS 18/19 erworbenen Bonuspunkte werden zu der in der Klausur erreichten Punktzahl addiert. Erreichen Sie insgesamt $z \geq 50$ Punkte, so ist die Prüfung bestanden. Die Noten verteilen sich wie folgt:

Note	z	Note	z	Note	z	Note
1:			$z \geq 95$	$1,0$	$95 > z \geq 90$	$1,3$
2:	$90 > z \geq 85$	$1,7$	$85 > z \geq 80$	$2,0$	$80 > z \geq 75$	$2,3$
3:	$75 > z \geq 70$	$2,7$	$70 > z \geq 65$	$3,0$	$65 > z \geq 60$	$3,3$
4:	$60 > z \geq 55$	$3,7$	$55 > z \geq 50$	$4,0$		

Aufgabe	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**	**3a**	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**	**4d**	**5**
maximale Punkte	9	7	4	6	7	10	9	6	6	8	5	8	9	6
erreichte Punkte														
summiert														

Viel Erfolg!

	Klausur	**Bonus**	**Gesamt**
maximal	100	15	115
erreicht			

Note:

Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) **[9 Pkte]**

(i) Sie sollen vier Substanzen A, B, C und D in Rezepturen benutzen. Dabei sind folgende Vorschriften einzuhalten. (6 Pkte)

Vorschrift 1: Wenn A benutzt wird, dann müssen B oder C – aber nicht beide – als Gegenmittel benutzt werden.

Vorschrift 2: Wird Substanz C benutzt, dann muss Substanz D benutzt werden, und umgekehrt.

Vorschrift 3: Wird Substanz B nicht benutzt, dann benutze C genau dann, wenn D benutzt wird.

Formalisieren Sie die drei Vorschriften durch je eine aussagenlogische Formel.

$\varphi_{\text{Vorschrift 1}} :=$

$\varphi_{\text{Vorschrift 2}} :=$

$\varphi_{\text{Vorschrift 3}} :=$

(ii) Leiten Sie den leeren Disjunktionsterm ϵ mittels **Resolution** aus der Menge (3 Pkte)

$$K := \Big\{ \{\neg A, B\}, \{\neg B, A\}, \{\neg B, \neg C\}, \{B, C\}, \{\neg A, C\}, \{A, \neg C\} \Big\}$$

von Disjunktionstermen her.

Geben Sie alle Schritte Ihres Resolutionsbeweises an. Aus Ihrer Beschreibung muss hervorgehen, welche Disjunktionsterme (ob zu K gehörig oder zwischenzeitlich abgeleitet) benutzt werden.

$$\{\neg A, B\} \quad \{\neg B, A\} \quad \{\neg B, \neg C\} \quad \{B, C\} \quad \{\neg A, C\} \quad \{A, \neg C\}$$

(b) **[7 Pkte]**

(i) Geben Sie eine zur Formel (3 Pkte)

$$\psi := ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$$

äquivalente Formel ψ' in **konjunktiver** Normalform (KNF) an.
(Wenn Sie Ihren Lösungsweg angeben, können Sie Teilpunkte auch bei falscher Lösung erhalten.)

$\psi' =$

Sie können die untenstehende Wahrheitstafel verwenden.

A	**B**	**C**	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

(ii) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (4 Pkte)

Seien φ und ψ beliebige aussagenlogische Formeln.

- φ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist. ☐ wahr ☐ falsch
- $(\neg\psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \equiv \varphi$ ☐ wahr ☐ falsch
- $\mathbf{1} \models \varphi$ gilt genau dann, wenn $\neg\varphi \equiv \mathbf{0}$ gilt. ☐ wahr ☐ falsch
- $\varphi \models \psi$ gilt genau dann, wenn $(\varphi \rightarrow \psi)$ erfüllbar ist. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Gegeben sei ein $n \times n$-Schachbrett $\mathcal{S} = \{1, \dots n\} \times \{1, \dots, n\}$ mit n Zeilen und n Spalten. Verwenden Sie für alle Positionen $(i, j) \in \mathcal{S}$ die Variablen $T_{i,j}$ mit der Bedeutung, dass auf dem Feld (i, j) in Zeile i und Spalte j ein Turm steht. **[4 Pkte]**

Die folgenden Regeln sind einzuhalten:

Regel 1: In Zeile 3 stehen zwei Türme direkt nebeneinander.

Beschreiben Sie Regel 1 durch eine aussagenlogische Formel φ.

$\varphi =$

Regel 2: In jeder Spalte steht mindestens ein Turm.

Beschreiben Sie Regel 2 durch eine aussagenlogische Formel ψ.

$\psi =$

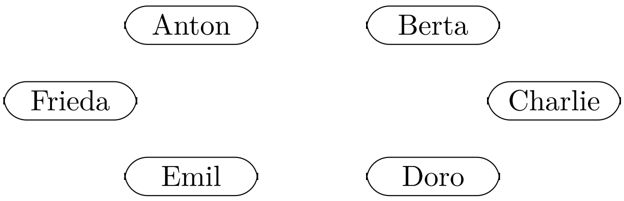
Aufgabe 2: Graphen

(a) Sie betreiben ein kleines Fahrradgeschäft, in dem man auch Lastenfahrräder mieten kann. Für Samstag haben schon sechs Kunden je ein Lastenfahrrad gemietet: **[6 Pkte]**

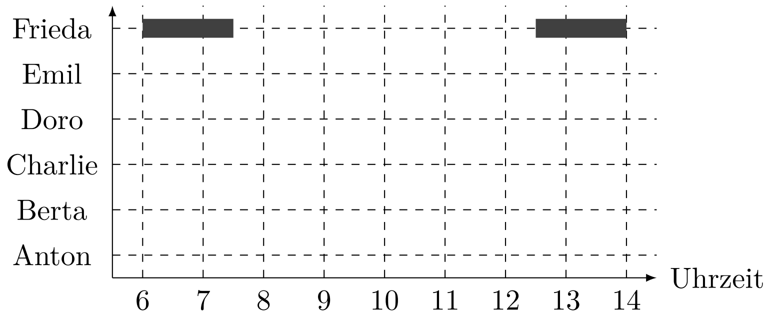
Kunde	**Beginn**	**Ende**	**Kunde**	**Beginn**	**Ende**
Anton	7 Uhr	9 Uhr	Doro	7 Uhr	12 Uhr
Berta	10 Uhr	13 Uhr	Emil	8 Uhr	9:30 Uhr
Charlie	10:30 Uhr	13:30 Uhr	Frieda	6 Uhr	7:30 Uhr
				12:30 Uhr	14 Uhr

Ein Lastenfahrrad kann natürlich nicht an mehrere Kunden vermietet werden, wenn sich ihre Mietzeiträume überschneiden. Beispielsweise können Sie nicht dasselbe Fahrrad an Charlie und Doro vermieten. Solche Situationen bezeichnen wir als *Mietkonflikte*. Außerdem möchte Frieda in beiden Mietperioden dasselbe Lastenfahrrad fahren.

(i) Modellieren Sie alle *Mietkonflikte* durch einen Graphen G. (2 Pkte)



Sie dürfen das folgende Koordinatensystem als Hilfsmittel verwenden:



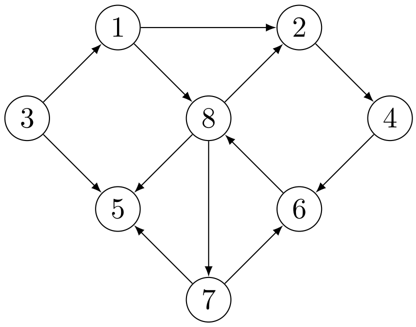
(ii) Welches graphentheoretische Problem in G muss gelöst werden, damit alle Mietverträge mit möglichst wenigen Lastenfahrrädern erfüllt werden können? (1 Pkt)

(iii) Mit wie vielen Lastenfahrrädern können Sie alle sechs Mietverträge erfüllen? Wieso reichen weniger Lastenfahrräder nicht aus? (3 Pkte)

Mit _____ Lastenfahrrädern können alle Kunden bedient werden, weil ...

Weniger Lastenfahrräder reichen nicht aus, weil ...

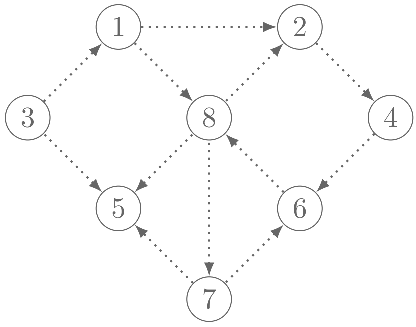
(b) Sei G der folgende Graph. **[7 Pkte]**



(i) Besitzt G einen Hamilton-Weg? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

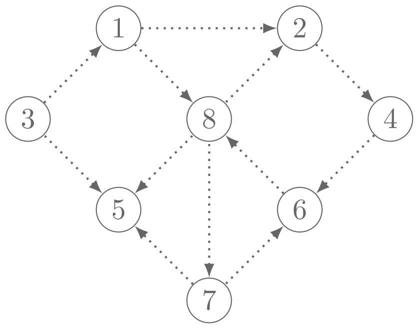
☐ ja ☐ nein

Sie können die folgende Vorlage benutzen.



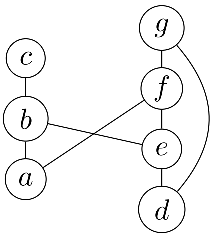
(ii) Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten von G an. (2 Pkte)

Sie können die folgende Vorlage benutzen.

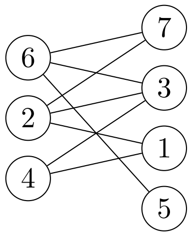


(iii) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (3 Pkte)

G_1



G_2



- G_1 ist bipartit. ☐ wahr ☐ falsch
- G_2 besitzt ein perfektes Matching. ☐ wahr ☐ falsch
- G_2 ist planar. ☐ wahr ☐ falsch

(c) **[10 Pkte]**

(i) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort. (3 Pkte)

„Es gibt einen ungerichteten Baum $B := (V, E)$ mit $V := \{a, b, c, d\}$ und

$$\mathrm{Grad}_B(a) = 1, \quad \mathrm{Grad}_B(b) = 1, \quad \mathrm{Grad}_B(c) = 3, \quad \mathrm{Grad}_B(d) = 2.\text{“}$$

☐ wahr ☐ falsch

Beweis:

(ii) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten höchstens k Nachbarn hat, d. h. es gilt $\mathrm{Grad}(G) \leq k$. (7 Pkte)

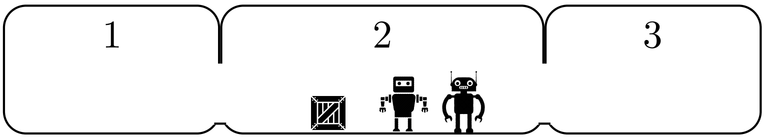
Zeigen Sie (z. B. durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Knoten):

G besitzt eine Färbung mit höchstens $k + 1$ Farben.

Beweis:

Aufgabe 3: Markov-Ketten

(a) In einem Korridor bestehend aus den drei Räumen 1, 2 und 3 stehen eine Kiste sowie zwei Roboter A und B. **[9 Pkte]**



Die Roboter versuchen, die Kiste durch *Ziehen* bzw. *Schieben* zu bewegen.

- Wenn beide Roboter **ziehen**, bewegt sich die Kiste einen Raum nach **rechts**.
  (Wenn sich die Kiste bereits ganz rechts (d.h. in Raum 3) befindet, passiert nichts.)
- Wenn beide Roboter **schieben**, bewegt sich die Kiste einen Raum nach **links**.
  (Wenn sich die Kiste bereits ganz links (d.h. in Raum 1) befindet, passiert nichts.)
- Andernfalls bleibt die Kiste an ihrem Ort.

Beide Roboter wählen ihre Aktion (*Ziehen* oder *Schieben*) in jedem Schritt zufällig und unabhängig vom jeweils anderen.

- Roboter A wählt *Ziehen* oder *Schieben* jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit.
- Roboter B wählt *Ziehen* mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und *Schieben* mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.

(i) Modellieren Sie die Bewegung der Kiste als Irrfahrt auf den Räumen $1, 2, 3$ durch eine Markov-Kette (G, P). Der Zustand i drücke aus, dass sich die Kiste in Raum i befindet. Geben Sie den Graphen G in grafischer Darstellung an und beschriften Sie dessen Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten. (5 Pkte)

(ii) Angenommen, die Kiste befindet sich anfangs in Raum 2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich die Kiste zwei Schritte später – immer noch oder wieder – in Raum 2? (2 Pkte)

(iii) Ist die Markov-Kette (G, P) ergodisch? (1 Pkt)

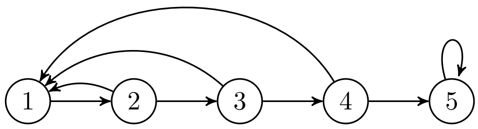
☐ ja ☐ nein

(iv) Besitzt die Markov-Kette (G, P) eine Grenzverteilung? (1 Pkt)

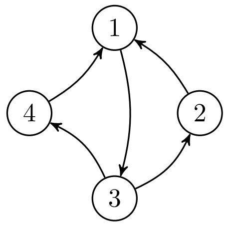
☐ ja ☐ nein

(b) **[6 Pkte]**

(i) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1 und G_2: (4 Pkte)



G_1



G_2

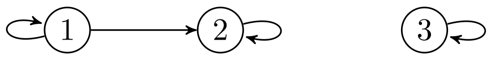
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

G_1 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_1 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie den Graphen einer Markov-Kette an, die mehrere stationäre Verteilungen besitzt. (1 Pkt)

(iii) Geben Sie den Graphen einer Markov-Kette an, die **keine** Grenzverteilung besitzt. (1 Pkt)

(c) Betrachten Sie den folgenden Webgraphen WEB. **[6 Pkte]**



(i) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für den Page-Rank $PR = (PR_1, PR_2, PR_3)$ bezüglich $d = \frac{1}{2}$ auf. (3 Pkte)

(ii) Berechnen Sie den Page-Rank PR. (3 Pkte)

$PR = \Big($

Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

(a) **[8 Pkte]**

(i) Gegeben seien die beiden regulären Ausdrücke

$$R_1 := (b|ab)(\varepsilon|b)^* \quad \text{und} \quad R_2 := (a|ba)^*(\varepsilon|a|b)$$

über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$. Geben Wörter $w_1 \in L(R_1)$ und $w_2 \notin L(R_2)$ an. (2 Pkte)

$w_1 :=$ ____________________ $\in L(R_1)$

$w_2 :=$ ____________________ $\notin L(R_2)$

(ii) Gegeben sei der NFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$. In der Potenzmengenkonstruktion wird ein zu A äquivalenter DFA $A' = (\Sigma, Q', \delta', q_0', F')$ mit $Q' = \mathcal{P}(Q)$ und $q_0' = \{q_0\}$ konstruiert. Vervollständigen Sie die Definition von $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ und $F' \subseteq Q'$: (3 Pkte)

$\delta'(X, a) :=$

$F' := \Big\{$

(iii) Seien R_1 und R_2 reguläre Ausdrücke über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen oder widerlegen Sie: (3 Pkte)

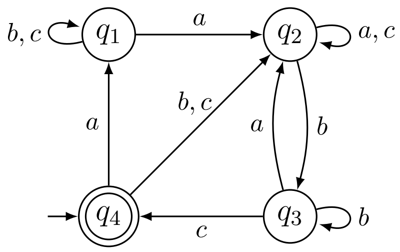
$$L((R_1|R_2)^*) = L(R_1^*|R_2^*).$$

Beweis:

(b) Konstruieren Sie einen DFA D mit **genau vier** Zuständen für die Sprache **[5 Pkte]**

$$L := \{b, ab\} \cdot \{b\}^*.$$

(c) (i) Der folgende DFA A_1 über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sei gegeben: **[8 Pkte]**

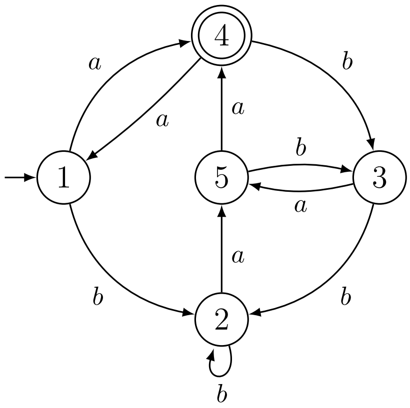


Geben Sie jeweils einen Zeugen für folgende Inäquivalenzen bezüglich der Verschmelzungsrelation an. (2 Pkte)

Zeuge für $q_1 \not\equiv_{A_1} q_3$:

Zeuge für $q_1 \not\equiv_{A_1} q_2$:

(ii) Der folgende DFA A_2 über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ sei gegeben:



Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A'_2 für A_2. Geben Sie A'_2 in graphischer Darstellung an. (6 Pkte)

(Wenn Sie Zwischenschritte angeben, können Sie auch bei falscher Lösung Teilpunkte erhalten.)

(Sie können folgende Vorlage verwenden.) Äquivalenzklassenautomat A'_2:

2				
3				
4				
5				
	1	2	3	4

(d) **[9 Pkte]**

(i) Geben Sie die Definition der Nerode-Relation an. (3 Pkte)

Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $w_1, w_2 \in \Sigma^*$.

Dann gilt $w_1 \equiv_L w_2$ genau dann, wenn ...

(ii) Zeigen Sie, dass die folgende Sprache nicht regulär ist. (6 Pkte)

$$L := \left\{ xyy : x \in \{a,b\}^*, y \in \{b,c\}^* \right\}$$

Beweis:

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

[6 Pkte]

(i) Sei $G := (\Sigma, V, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik mit $\Sigma := \{a, b, c, d\}$, $V := \{S, T\}$ und

$$\begin{aligned} P := \{&S \to aaSbb \mid T, \\ &T \to cTd \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Geben Sie eine umgangssprachliche oder mathematische Beschreibung der Sprache $L(G)$ an. (3 Pkte)

(ii) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G := (\Sigma, V, S, P)$ an, so dass gilt (3 Pkte)

$$L(G) = \{a^n b^n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^{2n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

$V = \{$

$P = \{$