Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Georg Schnitger

28. Februar 2019

Diskrete Modellierung (WS 18/19)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

⇓ BITTE GENAU BEFOLGEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind in dieser Klausur keine Hilfsmittel erlaubt. Das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel stellt eine Täuschung dar und führt zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur. Schalten Sie insbesondere Ihre Handys und Smartwatches vor Beginn der Klausur aus.
- Legen Sie Ihre Goethe-Card deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir während der Klausur Ihre Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur alle von 2 bis 18 durchnummerierten Seiten enthält.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Notfalls können Sie auch die beigefügten Zusatzblätter am Ende der Klausur benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich. Wenn Sie Lösungen auf Zusatzblättern notieren, vermerken Sie dies deutlich bei den jeweiligen Aufgabenstellungen.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung diese verlangt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer.
- Schreiben Sie ausschließlich mit einem dokumentenechten blauen oder schwarzen Stift. Verwenden Sie insbesondere keinen Bleistift, kein Tipp-Ex, keinen radierbaren Kugelschreiber oder löschbaren Füller.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können Sie maximal 100 Punkte erreichen. Ihre durch die Übungsaufgaben im WS 18/19 erworbenen Bonuspunkte werden zu der in der Klausur erreichten Punktzahl addiert. Erreichen Sie insgesamt $z \geq 50$ Punkte, so ist die Prüfung bestanden. Die Noten verteilen sich wie folgt:

Note	z	Note	z	Note	z	Note
1:			$z \geq 95$	$1,0$	$95 > z \geq 90$	$1,3$
2:	$90 > z \geq 85$	$1,7$	$85 > z \geq 80$	$2,0$	$80 > z \geq 75$	$2,3$
3:	$75 > z \geq 70$	$2,7$	$70 > z \geq 65$	$3,0$	$65 > z \geq 60$	$3,3$
4:	$60 > z \geq 55$	$3,7$	$55 > z \geq 50$	$4,0$		

Aufgabe	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**	**3a**	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**	**4d**	**5**
maximale Punkte	9	7	6	6	8	6	11	4	7	7	5	9	8	7
erreichte Punkte														
summiert														

Viel Erfolg!

	Klausur	**Bonus**	**Gesamt**
maximal	100	15	115
erreicht			

Note:

Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) **[9 Pkte]**

(i) Sie sollen vier Substanzen A, B, C und D in Rezepturen benutzen. Dabei sind folgende Vorschriften einzuhalten. (6 Pkte)

Vorschrift 1: Wird A benutzt, dann muss eine weitere Substanz benutzt werden.

Vorschrift 2: Werden A und B benutzt, dann darf höchstens eine der Substanzen C oder D benutzt werden.

Vorschrift 3: C darf nur dann benutzt werden, wenn mindestens eine der Substanzen A und B benutzt wird. Aber keinesfalls dürfen Sie A, B und C zusammen benutzen!

Formalisieren Sie die drei Vorschriften durch je eine aussagenlogische Formel.

$\varphi_{\text{Vorschrift 1}} :=$

$\varphi_{\text{Vorschrift 2}} :=$

$\varphi_{\text{Vorschrift 3}} :=$

(ii) Leiten Sie den leeren Disjunktionsterm ϵ mittels **Resolution** aus der Menge (3 Pkte)

$$K := \Big\{ \{\neg B, C\}, \{\neg C, B\}, \{A, \neg C\}, \{\neg A, \neg B\}, \{B, C\} \Big\}$$

von Disjunktionstermen her.

Geben Sie alle Schritte Ihres Resolutionsbeweises an. Aus Ihrer Beschreibung muss hervorgehen, welche Disjunktionsterme (ob zu K gehörig oder zwischenzeitlich abgeleitet) benutzt werden. Eine grafische Darstellung reicht aus.

$\{\neg B, C\}$ $\quad \{\neg C, B\}$ $\quad \{A, \neg C\}$ $\quad \{\neg A, \neg B\}$ $\quad \{B, C\}$

(b) (i) Geben Sie eine zur Formel **[7 Pkte]**

$$\psi := ((A \to B) \to C)$$

äquivalente Formel ψ' in **konjunktiver** Normalform (KNF) an. (3 Pkte)
(Wenn Sie Ihren Lösungsweg angeben, können Sie Teilpunkte auch bei falscher Lösung erhalten.)

$\psi' =$

Sie können die untenstehende Wahrheitstafel verwenden.

A	**B**	**C**	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

(ii) Gegeben sei ein $n \times n$-Schachbrett $\mathcal{S} = \{1, \ldots n\} \times \{1, \ldots, n\}$ mit n Zeilen und n Spalten. (4 Pkte)
Verwenden Sie für alle Positionen $(i, j) \in \mathcal{S}$ die Variablen $L_{i,j}$ und $T_{i,j}$ mit der Bedeutung, dass auf dem Feld (i, j) in Zeile i und Spalte j ein Läufer bzw. ein Turm steht.
Beschreiben Sie die folgenden Regeln jeweils durch eine aussagenlogische Formel.

Regel 1: Auf keinem Feld des Schachbretts $\mathcal{S}$ dürfen sowohl ein Läufer als auch ein Turm stehen.

$\varphi_{\text{Regel 1}} :=$

Regel 2: Wenn auf dem Feld $(3, 7)$ ein Turm steht, dann steht weder in Zeile 3 noch in Spalte 7 ein Läufer.

$\varphi_{\text{Regel 2}} :=$

(c) Die Formeln $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$ werden rekursiv wie folgt definiert. **[6 Pkte]**

Rekursionsanfang: $\varphi_2 := (X_2 \to X_1)$.
Rekursionsschritt: $\varphi_{n+1} := (X_{n+1} \to \varphi_n)$ für $n \geq 2$.

(Beispielsweise ist $\varphi_4 = (X_4 \to (X_3 \to (X_2 \to X_1)))$.)

Zeigen Sie die folgende Aussage durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:

Eine Belegung $\mathcal{B} : \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \to \{0, 1\}$ falsifiziert φ_n **genau dann**, wenn

$$\mathcal{B}(X_i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in \{2, 3, \ldots, n-1, n\}, \\ 0, & \text{falls } i = 1 \end{cases}$$

gilt.

Beweis:

Aufgabe 2: Graphen

(a) Um Ihr Internet-Nachrichtenportal zu finanzieren, verkaufen Sie Werbeflächen (links, rechts, oben, unten) zu den folgenden Preisen: **[6 Pkte]**

Fläche	links	rechts	oben	unten
Preis	10	10	20	5

Die Marketingabteilungen der vier Unternehmen u_1, u_2, u_3 und u_4 haben errechnet, wie groß der erwartete Umsatz ist, wenn ihre Werbung auf den jeweiligen Flächen angezeigt wird:

Umsatz	links	rechts	oben	unten
u_1	14	13	27	3
u_2	5	16	18	6
u_3	13	3	25	1
u_4	7	9	10	8

Eine Fläche $f \in \{\text{links}, \text{rechts}, \text{oben}, \text{unten}\}$ ist für ein Unternehmen $u \in \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *interessant*, wenn der erwartete Umsatz für u größer ist als der Preis der Fläche f.

(i) Fügen Sie eine Kante $\{u, f\}$ genau dann in den Graphen G ein, wenn die Fläche f für das Unternehmen u interessant ist. (2 Pkte)

(ii) Angenommen, jedes Unternehmen kauft mindestens eine interessante Fläche. Welches graphentheoretische Problem in G muss gelöst werden, damit jede Fläche von höchstens einem Unternehmen gekauft wird? (2 Pkte)

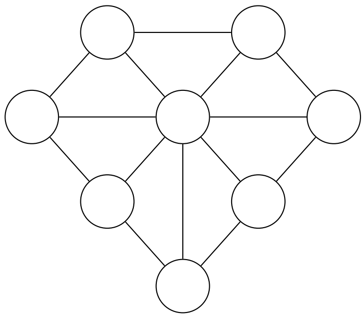
(iii) Der *erwartete Gewinn* eines Unternehmens beim Kauf einer Fläche ist die Differenz „erwarteter Umsatz minus Preis". Angenommen, jedes Unternehmen kauft mindestens eine interessante Fläche und jede Fläche wird von höchstens einem Unternehmen gekauft. Wie groß ist die Summe der erwarteten Gewinne im besten Fall? (2 Pkte)

Im besten Fall beträgt die Summe der erwarteten Gewinne ______.

Platz für Nebenrechnungen:

(b) **[8 Pkte]**

(i) Bestimmen Sie für den folgenden Graphen $G = (V, E)$ eine Färbung mit möglichst wenigen Farben. Tragen Sie die Farben direkt in die Knoten ein und geben Sie die chromatische Zahl $\chi(G)$ an. (2 Pkte)



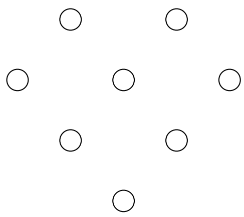
$\chi(G) =$ ______________

(ii) Beweisen Sie, dass G nicht mit weniger Farben färbbar ist. (2 Pkte)

Beweis:

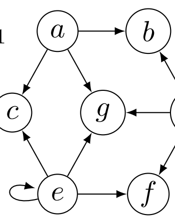
(iii) Geben Sie einen Spannbaum für G an. (1 Pkt)

Vorlage:

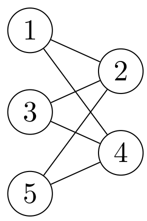


(iv) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (3 Pkte)

G_1



G_2



- Jede starke Zusammenhangskomponente von G_1 besteht aus einem einzigen Knoten. ☐ wahr ☐ falsch
- G_2 besitzt einen Hamilton-Kreis. ☐ wahr ☐ falsch
- Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt: $\sum_{v \in V} \text{Aus-Grad}_G(v) = \sum_{v \in V} \text{Ein-Grad}_G(v)$. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir betrachten bipartite Graphen $G = (V, E)$ mit $V = V_1 \cup V_2$ und den Bipartitionsklassen $V_1 = \{1, 2, \ldots, k\}$ und $V_2 = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ mit folgender Eigenschaft $(*)$: **[6 Pkte]**

Jeder Knoten $i \in V_1$ besitzt mindestens $k - i + 1$ Nachbarn in V_2.
(D. h. $\mathrm{Grad}_G(k) \geq 1,\ \mathrm{Grad}_G(k-1) \geq 2,\ \ldots, \mathrm{Grad}_G(1) \geq k$.) $(*)$

Zeigen Sie, z. B. durch vollständige Induktion nach k:

Jeder Graph $G = (V, E)$ mit Eigenschaft $(*)$ besitzt ein **perfektes** Matching.

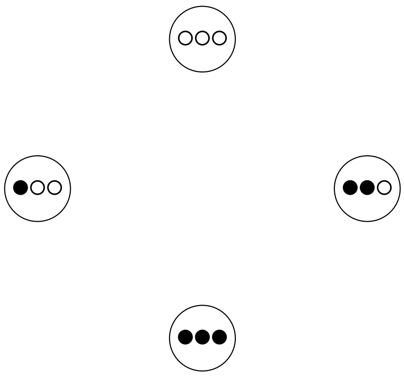
Beweis:

Aufgabe 3: Markov-Ketten

(a) In einer Kiste befinden sich drei Kugeln, die jeweils entweder schwarz oder weiß sind. **[11 Pkte]**
Bob führt folgendes Verfahren durch: Er entfernt zufällig eine der drei Kugeln aus der Kiste.

- ○○ Falls die zwei übrig gebliebenen Kugeln weiß sind, legt er eine schwarze Kugel in die Kiste zurück.
- ●○ Falls die zwei übrig gebliebenen Kugeln unterschiedliche Farben haben, legt er eine weiße Kugel in die Kiste zurück.
- ●● Falls die zwei übrig gebliebenen Kugeln schwarz sind, legt er eine Kugel mit zufälliger Farbe (schwarz oder weiß, jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit) in die Kiste zurück.

(i) Modellieren Sie das Verfahren durch eine Markov-Kette (G, P). Geben Sie den Graphen G in graphischer Darstellung an und beschriften Sie die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten. Ein Zustand gibt an, wie viele weiße bzw. schwarze Kugeln in der Kiste sind, z. B. bedeutet ●○○, dass eine schwarze und zwei weiße Kugeln in der Kiste sind. (6 Pkte)



(ii) Angenommen, anfangs liegen zwei schwarze und eine weiße Kugel (●●○) in der Kiste. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schritte später eine schwarze und zwei weiße Kugeln (●○○) in der Kiste liegen? (2 Pkte)

(iii) Ist die Markov-Kette (G, P) ergodisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

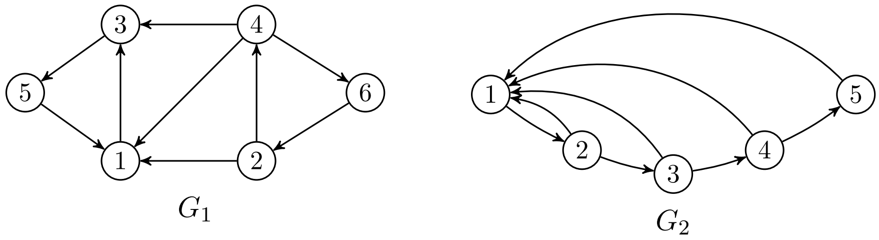
☐ ja ☐ nein

Begründung:

(iv) Besitzt (G, P) eine eindeutige Grenzverteilung? (1 Pkt)

☐ ja ☐ nein

(b) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1 und G_2: **[4 Pkte]**



Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

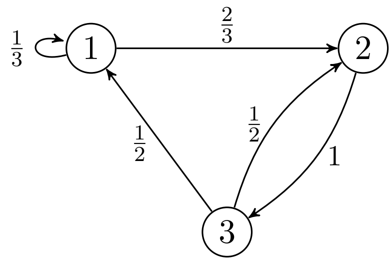
G_1 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_1 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
Jede ergodische Markov-Kette besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung.	☐ ja	☐ nein

(c) **[7 Pkte]**

(i) Geben Sie die Definition einer stationären Verteilung π für eine Markov-Kette (G, P) an. (1 Pkt)

Die Verteilung π ist stationär für (G, P) genau dann, wenn ...

(ii) Betrachten Sie die folgende Markov-Kette $M := (G, P)$



Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der stationären Verteilung $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ für M auf. (3 Pkte)

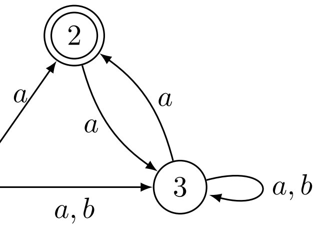
(iii) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung für M. (3 Pkte)

$\pi = \Big($

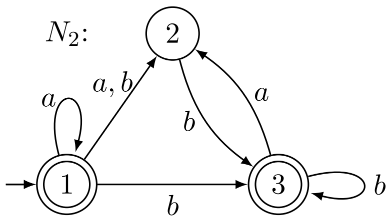
Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

(a) Gegeben seien die beiden NFAs N_1 und N_2 durch die folgenden Zustandsdiagramme: **[7 Pkte]**

N_1:



N_2:



(i) Beschreiben Sie die Sprache $L(N_1)$ umgangssprachlich oder mathematisch (z. B. durch einen regulären Ausdruck). (3 Pkte)

(ii) Geben Sie Wörter $w_1 \in L(N_2)$ und $w_2 \notin L(N_2)$ an. (2 Pkte)

$w_1 :=$ ____________________ $\in L(N_2)$

$w_2 :=$ ____________________ $\notin L(N_2)$

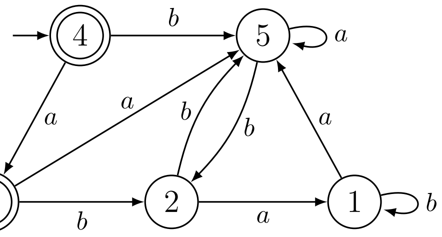
(iii) Sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein NFA und $w \in \Sigma^*$ ein Wort. Vervollständigen Sie die folgende Definition mithilfe der erweiterten Übergangsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$. (2 Pkte)

Das Wort w wird von A genau dann *akzeptiert*, wenn ...

(b) Konstruieren Sie einen DFA D mit **genau fünf** Zuständen für die Sprache **[5 Pkte]**

$$L = \{a, b\}^* \cdot \{aa, bb\}.$$

(c) (i) Der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ sei gegeben: **[9 Pkte]**



Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A' für A. Geben Sie A' in grafischer Darstellung an. (6 Pkte)
(Wenn Sie Zwischenschritte angeben, können Sie auch bei falscher Lösung Teilpunkte erhalten.)

(Sie können folgende Vorlage verwenden.)

2				
3				
4				
5				
	1	2	3	4

Äquivalenzklassenautomat A':

(ii) Sei $D := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA, seien $p, q \in Q$ und sei $a \in \Sigma$. (3 Pkte)
Zeigen Sie:

Wenn $\delta(p, a) \not\equiv_D \delta(q, a)$, dann gilt auch $p \not\equiv_D q$.

Beweis:

(d) **[8 Pkte]**

(i) Gegeben sei die Sprache (2 Pkte)

$$L_1 = \Big\{ w \in \{a, b, c\}^* : w \text{ enthält } \textbf{nicht} \text{ das Teilwort } abb \text{ und } \textbf{nicht} \text{ das Teilwort } ba \Big\}.$$

Zeigen Sie folgende Inäquivalenzen bzgl. der Nerode-Relation durch Angabe geeigneter Zeugen:

$aa \not\equiv_{L_1} ac$:

$ab \not\equiv_{L_1} ac$:

(ii) Gegeben sei die Sprache (6 Pkte)

$$L_2 = \{\, a^i b^j a^k \;:\; i, j, k \in \mathbb{N}_{>0},\; j < k \,\}.$$

Zeigen Sie: L_2 ist nicht regulär.

Beweis:

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

[7 Pkte]

(i) Sei $\Sigma := \{a, b, c, d\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ an, so dass gilt: (3 Pkte)

$$L(G) = \{a^n b^n c^k d^k \ : \ n, k \in \mathbb{N}\}$$

$V = \Big\{$

$P = \Big\{$

(ii) Gegeben sei das Alphabet (4 Pkte)

$$\Sigma := \{a, b, 0, +\infty, +, \min, (\ ,\ ),\ ;\ \}.$$

Die Sprache L aller (min,+)-Ausdrücke (mit den Unbestimmten a und b sowie den Konstanten 0 und $+\infty$) ist rekursiv definiert durch:

Rekursionsanfang: Es ist $a \in L$, $b \in L$, $0 \in L$ und $+\infty \in L$.
Rekursionsschritt: Ist $x \in L$ und $y \in L$, dann ist auch

$$(x + y) \in L \quad \text{und} \quad \min(x; y) \in L.$$

Beispielsweise gilt

$$a \in L, \quad \min(b; +\infty) \in L \quad \text{und} \quad \min(a; \min(b; +\infty)) \in L.$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ an, so dass gilt

$$L(G) = L.$$

$V = \Big\{$

$P = \Big\{$