Diskrete Modellierung

Wintersemester 2019/20

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 9

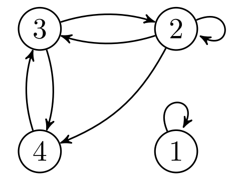
Ausgabe: 12.12.19
Abgabe: 19.12.19 bis 8:14 Uhr

Aufgabe 9.1 *Page-Rank* $(4 + 12 + 5 + 4 = 25$ Punkte$)$

a) Betrachten Sie den rechts dargestellten Webgraphen W. Geben Sie die Übergangsmatrix $P_d(W)$ für den Dämpfungsfaktor $d = \frac{3}{4}$ an.

b) Bestimmen Sie ein Tupel PR, das die Page-Rank-Eigenschaft (bzgl. $d = \frac{3}{4}$) besitzt. Stellen Sie für die Bestimmung von PR zuerst ein lineares Gleichungssystem auf.

W:



c) Wie ändern sich die Page-Ranks PR_i der Seiten $i = 1, 2, 3, 4$, wenn in W der Link von Webseite 3 auf Webseite 2 gelöscht wird? Welche steigen, welche sinken, welche bleiben gleich?

d) Geben Sie einen Webgraphen W' mit den Knoten 1, 2, 3 und 4 an, sodass für die Page-Ranks gilt: $\mathrm{PR}_1 = \mathrm{PR}_2 = \mathrm{PR}_3 > \mathrm{PR}_4$.

In Teil c) und d) genügt eine kurze, begründete Antwort. Eine Rechnung ist nicht erforderlich.

Aufgabe 9.2 *Gryffindor vs. Ravenclaw* $(10 + 12 + 3 = 25$ Punkte$)$

Das Quidditch-Spiel[1] Gryffindor gegen Ravenclaw steht bevor. Der Mannschaftskapitän der Gryffindors hat beim Training der gegnerischen Mannschaft zugeschaut und vom Passspiel während eines Angriffs der drei Ravenclaw-Jäger Jeremy Stretton, Roger Davies und Randolph Burrow folgende Beobachtungen festgehalten.

- Stretton spielt den Quaffel[2] immer sofort weiter, wobei er doppelt so oft zu Burrow wie zu Davies abspielt.
- Davies spielt nur in der Hälfte aller Fälle den Quaffel ab, und zwar doppelt so oft zu Stretton wie zu Burrow.
- Burrow behält den Quaffel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, spielt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$ zu Davies ab, und ansonsten zu Stretton.

a) Modellieren Sie das Passspiel der Ravenclaw-Jäger als Markov-Kette $\mathcal{M} = (G, P)$, indem Sie eine Irrfahrt des Quaffels auf den Zuständen $1 :=$ Stretton, $2 :=$ Davies, und $3 :=$ Burrow gemäß den oben beschriebenen Wahrscheinlichkeiten annehmen.
Geben Sie den Graphen G an und tragen Sie für jede Kante die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit ein. Geben Sie auch die Übergangsmatrix P an.

b) Am Anfang eines Angriffs sei Burrow im Quaffelbesitz, d.h. $\pi^{(0)} = (0, 0, 1)$ sei die Anfangsverteilung. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\pi^{(k)} = \left(\tfrac{1}{6}\left(1 - 3^{-k}\right),\ \tfrac{1}{3}\left(1 - 3^{-k}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(1 + 3^{-k}\right)\right)$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich Stretton, Davies bzw. Burrow im Quaffelbesitz, wenn der Angriff unendlich lange dauert, d. h. wenn k gegen ∞ strebt?

[1] Quidditch ist die Lieblingssportart des Zauberers Harry Potter und nicht zu verwechseln mit Muggel-Quidditch.
[2] Der Quaffel ist ein großer Lederball, der von den Jägern in eines der drei gegnerischen Tore befördert werden muss.

In Aufgabe 9.3 dürfen Sie einen Matrizenrechner (z. B. https://matrixcalc.org/de) als Hilfsmittel verwenden.

Aufgabe 9.3 *Karten mischen* (12 + 8 + 6 = 26 Punkte)

Alice und Bob spielen Karten mit einem Kartenstapel bestehend aus den drei Karten 1, 2, 3. Die beiden verwenden jeweils ein eigenes Mischverfahren:

- **Alice** mischt die Karten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ nicht. Andernfalls vertauscht sie mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit entweder die ersten beiden oder die letzten beiden Karten im Stapel.
- **Bob** zieht mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit eine der drei Karten aus dem Stapel und legt sie auf den Stapel.

a) Modellieren Sie beide Mischverfahren als Markov-Ketten, indem Sie jeweils den Graphen angeben und seine Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten beschriften. Benutzen Sie dazu die Zustände

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (3,1,2),\ (3,2,1),\ (2,3,1),\ (2,1,3),$$

wobei das Tripel (i,j,k) ausdrückt, dass die Karte i oben, die Karte j in der Mitte und die Karte k unten liegt. (Ordnen Sie dabei die Zustände in der obigen Reihenfolge kreisförmig an, siehe Teil c).)

b) Wir definieren ein Maß[3] m für die „Zufälligkeit“ einer Verteilung $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_6)$:

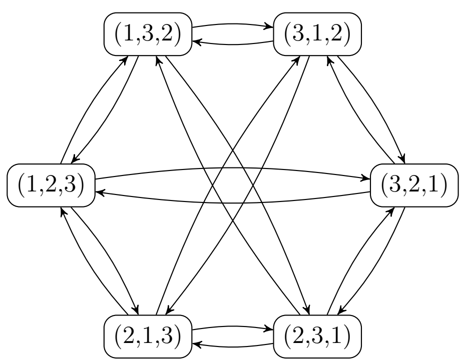
$$m(\mu) := \max \left\{ |\mu_i - \mu_j| : 1 \leq i < j \leq 6 \right\}$$

Je kleiner $m(\mu)$, desto besser mischt die Verteilung μ den Kartenstapel.

Vergleichen Sie die Qualität der Mischverfahren von Alice und Bob. Angenommen, anfangs liegen die Karten in der Reihenfolge $(1,2,3)$ auf dem Stapel. Mit welchem Verfahren sind die Karten besser gemischt, nach

i) einem Schritt?
ii) zwei Schritten?
iii) fünf Schritten?
iv) unendlich vielen Schritten?

c) Das Mischverfahren von **Charlie** ist durch die folgende Markov-Kette gegeben, wobei jeder Übergang mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ geschieht.



i) Geben Sie eine umgangssprachliche Formulierung von Charlies Mischverfahren an.

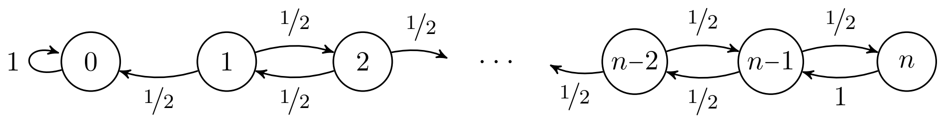
ii) Wieso ist es keine gute Idee, die Karten auf diese Weise zu mischen?

Bitte wenden!

[3] Bessere Maße für die „Zufälligkeit“ einer Verteilung sind i. A. die quadratische Abweichung $\sum_i (\mu_i - 1/n)^2$ oder die Shannon-Entropie $\sum_i \mu_i \log_2(1/\mu_i)$, die für diese Aufgabe aber unnötig kompliziert sind.

Aufgabe 9.4 *Walksat-Algorithmus für 2-KNF* (5 + 8 + 8 + 3 = 24 Punkte)

In der Vorlesung (Folien 42 und 43 im Kapitel Markov-Ketten bzw. Beispiel 6.12 in der neuen Version des Skripts) haben wir die folgende Markov-Kette als pessimistische Abschätzung der erwarteten Laufzeit für den Walksat-Algorithmus kennengelernt. Der Walksat-Algorithmus bestimmt, ob eine 2-KNF erfüllbar ist.



a) Erklären Sie kurz in eigenen Worten, was die Zustände der Kette bedeuten und wie die Übergangswahrscheinlichkeiten zustande kommen.

b) Wir betrachten eine Irrfahrt auf der obigen Kette. Sei $T(j)$ die erwartete Anzahl von Schritten, bis ein im Knoten j startender Irrfahrer den Zustand 0 erreicht. Geben Sie – basierend auf der Kette – eine Rekursionsgleichung für $T(j)$ an. Geben Sie auch eine kurze Erklärung an.

   Hinweis: Drücken Sie $T(j)$ in Abhängigkeit der beiden „Nachbarn" $T(j-1)$ und $T(j+1)$ aus. Behandeln Sie die Randfälle $T(n)$ und $T(0)$ separat.

c) Zeigen Sie, dass für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt:

$$T(j) = 2jn - j^2$$

   Hinweis: Setzen Sie die obige Lösung für $T(j)$ in die Rekursionsgleichung aus Teil b) ein und verifizieren Sie die Lösung durch Nachrechnen.

d) Zeigen Sie: Für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt $T(j) \leq n^2$.

   Fazit: Egal mit welcher (zufälligen) Anfangsbelegung der Walksat-Algorithmus beginnt, nach durchschnittlich n^2 Schritten hat er eine erfüllende Belegung gefunden (sofern es eine gibt).

Übrigens: Mit einer ähnlichen Argumentation lässt sich die erwartete Dauer eines fairen Glücksspiels (Gambler's Ruin, Beispiel 6.11 im Skript) bestimmen.