Diskrete Modellierung

Wintersemester 2019/20

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 12

Ausgabe: 23.01.20
Abgabe: 30.01.20

Aufgabe 12.1 *Moore- und Mealy-Automaten* (13 + 13 = 26 Punkte)

In einem CD-Laufwerk tastet ein Laser die Vertiefungen auf der Oberfläche einer CD ab. Ein Sensor registriert dabei die Wechsel zwischen sogenannten „Land"- und „Pit"-Zellen. Ein Wechsel von Land zu Pit bzw. von Pit zu Land kodiert eine 1. Zwei aufeinanderfolgende Zellen des gleichen Typs (beide Pit bzw. beide Land) kodieren eine 0. Formal entspricht diese Kodierung einer Funktion $C : \{\ell, p\}^+ \to \{0, 1, \diamond\}^+$ mit $w = w_1 w_2 \cdots w_n \mapsto \diamond x_2 x_3 \cdots x_n$, wobei $\diamond$ ein Dummy-Wert ist und

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } w_{i-1} = w_i, \\ 1, & \text{falls } w_{i-1} \neq w_i \end{cases}$$

für alle $i \in \{2, \dots, n\}$ gilt. Beispielsweise ist $C(\ell pp) = \diamond 10$ und $C(\ell\ell pp\ell) = \diamond 0101$.

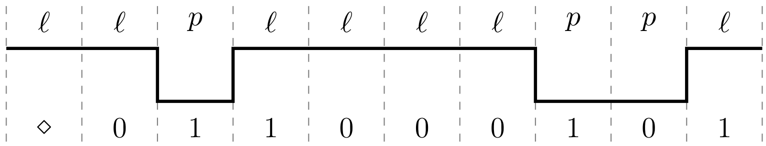


Abbildung 1: Beispiel die Oberfläche einer CD. Pit-Zellen sind mit p abgekürzt, Land-Zellen mit ℓ. Unten ist das kodierte Wort angegeben. Das Symbol $\diamond$ ist dabei ein Dummy-Wert, der den Start des kodierten Wortes markiert.

Wir wollen die Kodierung mithilfe von Automaten modellieren, die zu jedem gelesenen Wort eine *Ausgabe* produzieren. In der technischen Informatik verwenden wir hierfür *Moore-* und *Mealy-Automaten.* Details hierzu finden Sie in den Definitionen 7.11 und 7.13 im Skript.

Konstruieren Sie einen

a) Moore-Automaten $A_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{1,0}, \lambda_1, \Omega)$,

b) Mealy-Automaten $A_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{2,0}, \lambda_2, \Omega)$

mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{\ell, p\}$ und dem Ausgabealphabet $\Omega = \{0, 1, \diamond\}$, der bei Eingabe eines Wortes $w \in \Sigma^+$ das kodierte Wort $C(w) \in \Omega^+$ ausgibt.

Geben Sie eine kurze Erklärung Ihrer Modellierung an. Es genügt, wenn Sie die beiden Automaten grafisch darstellen.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.2 *Automaten für Teilbarkeit* (12 + 12 = 24 Punkte)

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$. Wir identifizieren jedes Wort $w = w_1 w_2 \cdots w_{|w|} \in \Sigma^*$ mit der natürlichen Zahl

$$z(w) := \begin{cases} 0 & \text{falls } w = \varepsilon \\ \sum_{i=1}^{|w|} w_i \cdot 2^{|w|-i} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit anderen Worten: Das Wort w ist eine Binärdarstellung von $z(w)$. Zum Beispiel ist $z(101) = 5$, $z(01101) = 13$, $z(100101) = 37$ und $z(10011101111110) = 10110$.

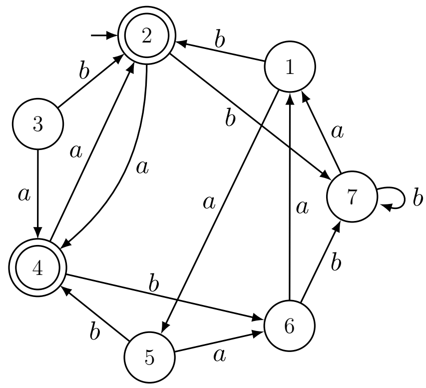
Geben Sie für die folgenden zwei Sprachen jeweils einen DFA mit möglichst wenigen Zuständen an.

a) $L_1 := \{w \in \Sigma^* \,:\, z(w) \text{ ist durch 4 teilbar}\}$

b) $L_2 := \{w \in \Sigma^* \,:\, z(w) \text{ ist durch 5 teilbar}\}$

Aufgabe 12.3 *Minimierung* (16 + 9 = 25 Punkte)

Der DFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $q_0 = 2$ und $F = \{2, 4\}$ sei durch die Grafik rechts gegeben.



a) Minimieren Sie A, d. h. bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A'. Verwenden Sie dazu den Tabellen-Algorithmus aus der Vorlesung (Abschnitt 7.3.4 im Skript). Geben Sie in der Tabelle für jedes Paar inäquivalenter Zustände die Menge M_i an, in die das Paar aufgenommen wird.

b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $\equiv_A^0$, $\equiv_A^1$ und $\equiv_A^2$.

Aufgabe 12.4 *Nerode-Automaten* ($15 + 10 + 10^* = 25$ Punkte + 10 Extrapunkte)

a) Bestimmen Sie den Nerode-Automaten für die Sprache

$$L_a := \{b\}^* \cdot \{bab\} \cdot \{b, c\}^* \quad \text{über dem Alphabet } \Sigma := \{a, b, c\}$$

in folgenden Schritten:

i) Geben Sie alle Äquivalenzklassen der Nerode-Relation an und beschreiben Sie jede der Klassen durch Angabe aller in ihr enthaltenen Elemente. (Z. B. $[\varepsilon]_{L_a} = \{\dots\}$)

ii) Wählen Sie für jede Klasse einen (möglichst kurzen) Vertreter und trennen Sie alle Vertreter paarweise verschiedener Klassen jeweils durch einen Zeugen.

iii) Geben Sie den Nerode-Automaten in grafischer Darstellung an.

Hinweis: Um alle Äquivalenzklassen zu bestimmen, beginnen Sie mit der Äquivalenzklasse $[\varepsilon]_{L_a}$ des leeren Wortes. Was passiert im Nerode-Automaten, wenn nun ein a, b oder c gelesen wird? Sind die Wörter a, b bzw. c äquivalent zu ε? Welche weiteren Äquivalenzklassen treten auf und welche Elemente enthalten sie?

b) Geben Sie (ohne Begründung) einen DFA mit möglichst wenigen Zuständen für die Sprache

$$L_b := \{bbb, aa, ab\} \cdot \Sigma^*$$

über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ an, z. B. den Nerode-Automaten.

c*) **Bonusaufgabe:** Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $u = u_1 u_2 \cdots u_k \in \Sigma^k$ ein Wort der Länge k. Zeigen Sie: Der Nerode-Automat für die Sprache

$$L_c := \Sigma^* \cdot \{u\} \cdot \Sigma^*$$

hat mindestens $k + 1$ Zustände.

Hinweis: Sei $0 \leq i < j \leq k$. Trennen Sie die Wörter $u_1 \cdots u_i$ und $u_1 \cdots u_j$ jeweils durch einen Zeugen.