Diskrete Modellierung

Wintersemester 2019/20

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Fragensammlung

7. Februar 2020

Wenn Sie die folgenden Fragen ohne Hilfe und Blick ins Skript beantworten können, dürfen Sie nachts *besonders* ruhig schlafen.
Die Liste ist natürlich nicht vollständig. Bestimmt haben wir das eine oder andere Thema vergessen. Das heißt aber nicht, dass wir es unwichtig finden! Sie sind herzlich dazu eingeladen, eigene Frage-Antwort-Listen zu entwerfen.

Inhalt

Mengenlehre und mathematische Grundlagen

a) Für Mengen M, N, wann gilt $M \subseteq N$, wann $M \in N$?

b) Für eine Menge N, wie sieht $\mathcal{P}(N)$ aus?

c) Gilt für jede Menge M: $\emptyset \subseteq M$? $\emptyset \in M$? $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(M)$? $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$?

d) Sei A eine Menge. Gilt $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?

e) Was ist die Menge $\mathrm{Abb}(A, B)$ und welche Kardinalität besitzt sie bei endlichen A und B?

f) Wie verhält sich die Kardinalität einer Menge A zur Kardinalität ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$?

g) Welche bzw. wie viele Elemente enthält $M \times N$?

h) Was ist eine Relation? Was ist eine Funktion?

i) Wann ist eine Funktion surjektiv, wann injektiv, wann bijektiv?

j) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Was ist das Bild von f?

k) Falls es eine injektive Funktion $f : A \to B$ gibt, was lässt sich über die Kardinalitäten von A und B sagen?

l) Können Sie eine bijektive Funktion $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ angeben?

Aussagenlogik

a) Wie ist die Menge AL definiert?

b) Wie übersetzt man Umgangssprache in Aussagenlogik?

c) Was ist eine Belegung $\mathcal{B}$? Was ist $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}}$ für eine Formel φ?

d) Wann ist eine Formel φ erfüllbar, falsifizierbar, allgemeingültig, unerfüllbar?

e) Wie viele Zeilen hat die Wahrheitstafel einer Formel φ mit n Variablen?

f) Wie zeigt man eine semantische Folgerung oder Äquivalenz?

g) Gilt $((x \to y) \to x) \models (x \to (y \to x))$?

h) Warum ist die Aussage „$\varphi \models \psi$ oder $\psi \models \varphi$“ nicht immer richtig, aber die Formel $((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$ stets allgemeingültig?

i) Wie bestimmt man eine DNF, wie eine KNF?

j) Wie sehen DNF und KNF für die Formel $\varphi = \big(A \wedge (B \leftrightarrow C)\big)$ aus?

k) Wie modelliert man logische Puzzles à la Sudoku?

l) Gibt es zu den Formeln $\sigma := \mathbf{0}$ und $\varepsilon := \mathbf{1}$ eine äquivalente DNF bzw. KNF?

m) Wie sieht eine Formel φ aus, die besagt, dass in jeder Zeile eines Schachbretts genau ein Turm steht?

n) Was ist der Zweck der Resolution und wie setzt man sie ein?

o) Können Sie mit Resolution aus der Menge $\{\{Q,T\},\{\neg P,Q\},\{\neg Q,R\},\{\neg R,T\},\{\neg T,P\},\{\neg P,\neg R\}\}$ den leeren Disjunktionsterm ϵ herleiten?

p) Ist die Formel $\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg b)$ erfüllbar?

q) Wie benutzt man SymPy?

r) Wem gehört der Fisch?

Beweismethoden

a) Welche Beweismethoden kennen Sie aus der Vorlesung und wie wendet man sie an?

b) Wo liegt der Fehler in folgendem „Beweis“?

   Zu zeigen: $1 = 2$.
   Beweis: Angenommen, es gilt $1 = 2$. Wir subtrahieren auf beiden Seiten eine Eins und erhalten $0 = 1$. Nun multiplizieren wir beide Seiten mit Null und erhalten die wahre Aussage $0 = 0$. Somit ist gezeigt, dass $1 = 2$ gilt. $\square$

c) Wie funktioniert die Cantorsche Diagonalisierung? Was lässt sich damit zeigen?

d) Wie zeigt man eine Äquivalenz „$\Longleftrightarrow$“?

e) Wann kann man ein Gegenbeispiel als Beweis benutzen?

f) Was darf man im Induktionsschritt benutzen?

g) Zeigen Sie per Induktion: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

h) Wie weist man Eigenschaften rekursiv definierter Funktionen nach?

i) Wie sehen Induktionsanfang und -schritt aus, wenn man Eigenschaften über die Fibonacci-Zahlen nachweist?

j) Zeigen Sie $x_k = 3^k$ f.a. $k \in \mathbb{N}$, wobei $x_0 := 1$, $x_1 := 3$ und $x_k := 5x_{k-1} - 6x_{k-2}$ f.a. $k \geq 2$ gelte.

k) Welchen Wert hat $\sum_{i=0}^{n} a^i$ mit $a \neq 1$?

l) Wieso gibt es manchmal mehrere Induktionsanfänge?

Graphen und Bäume

a) Worin unterscheiden sich gerichtete und ungerichtete Graphen?

b) Was ist der Grad eines Knotens? Was ist ein (einfacher) Kreis?

c) Was ist ein Hamiltonweg/-kreis? Was ist ein Eulerweg/-kreis? Welcher ist i. A. schwieriger zu finden?

d) Wahr oder falsch: Wenn G einen Euler-/Hamiltonkreis enthält, dann ist G (stark) zusammenhängend.

e) Was ist ein Matching? Was ist ein perfektes Matching?

f) Was sagt die chromatische Zahl eines Graphen aus?

g) Was ist eine Färbung? Wie viele Farben reichen aus, um einen planaren Graphen zu färben?

h) Wie viele Kanten haben der vollständige Graph K_n und der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$?

i) Welche chromatische Zahl besitzt der Graph K_n, welche besitzt der Graph $K_{m,n}$?

j) Besitzt der Graph $K_{100,200}$ einen Hamiltonweg?

k) Was ergibt $\sum_{v \in V} \mathrm{Grad}_G(v)$?

l) Gibt es einen (un)gerichteten Graphen mit 243 Knoten und 29403 Kanten?

m) Wahr oder falsch: G ist genau dann bipartit, wenn $\chi(G) \leq 2$.

n) Zeigen Sie: Wenn $G = (V, E)$ einen Hamiltonweg besitzt und $|V|$ gerade ist, dann besitzt G ein perfektes Matching.

o) Was ist ein ungerichteter Baum? Was ist ein gewurzelter Baum? Was ist ein Wald?

p) Wahr oder falsch: Jeder ungerichtete Graph hat einen Spannbaum.

q) Wie hoch kann ein Baum mit n Knoten mindestens/höchstens sein?

r) Wie viele Blätter besitzt ein vollständiger k-ärer Baum der Tiefe t?

s) Wie modelliert man Zwei-Personen-Spiele mit Bäumen? Was ist eine Gewinnstrategie?

t) Wie führt man Induktionsbeweise über Graphen oder Bäume?

u) Zeigen Sie ohne ins Skript zu schauen: Für jeden nicht-leeren Baum $B = (V, E)$ gilt $|E| = |V| - 1$.

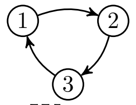
Markov-Ketten und Page-Rank

a) Wie sieht die Definition des (alten) Page-Rank PR aus der Perspektive des Peer-Reviews aus?

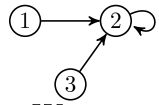
b) Wie ändern sich die Page-Ranks, wenn der Dämpfungsfaktor erhöht bzw. verringert wird?

c) Ordnen Sie folgende Page-Rank-Vektoren (bzgl. $d = \frac{1}{2}$) jeweils einem der drei Webgraphen zu.

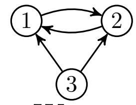
- $\mathrm{PR} = \frac{1}{12}(5,\ 5,\ 2)$
- $\mathrm{PR}' = \frac{1}{3}(1,\ 1,\ 1)$
- $\mathrm{PR}'' = \frac{1}{6}(1,\ 4,\ 1)$



$\textsc{Web}_1$



$\textsc{Web}_2$



$\textsc{Web}_3$

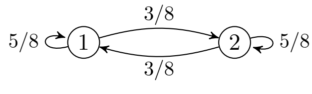
d) Wie sieht die Definition des (neuen) Page-Rank PR* aus der Perspektive des Zufallssurfers aus?

e) Warum benötigen wir den Dämpfungsfaktor?

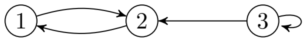
f) Was ist eine stochastische Matrix, was ist eine Verteilung?

g) Wenn eine Markov-Kette aktuell die Verteilung x besitzt, welche Verteilung besitzt sie nach einem Schritt? Welche Verteilung besitzt sie nach k Schritten?

h) Zeigen Sie für die folgende Kette per vollständiger Induktion:
Wenn $\pi^{(0)} = (1, 0)$, dann gilt $\pi^{(k)} = \frac{1}{2}(1 + 4^{-k}, 1 - 4^{-k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$.



i) Wann ist ein Graph G irreduzibel bzw. aperiodisch? Wann ist eine Markov-Kette ergodisch?

j) Ist die folgende Kette irreduzibel, aperiodisch, ergodisch? 

k) Geben Sie einen Graphen an, der irreduzibel, aber nicht aperiodisch ist; und einen, der aperiodisch, aber nicht irreduzibel ist.

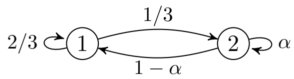
l) Was *bedeutet* Ergodizität?

m) Gibt es eine Markov-Kette, die eine eindeutige Grenzverteilung hat, aber nicht ergodisch ist?

n) Was hat die Grenzverteilung einer ergodischen Kette mit ihrer Übergangsmatrix zu tun?

o) Was ist eine stationäre Verteilung einer Markov-Kette, und wie berechnet man sie?

p) Wie viele stationäre Verteilungen besitzt eine Markov-Kette mindestens, wie viele höchstens? Wie viele stationäre Verteilungen besitzt eine ergodische Markov-Kette?

q) Berechnen Sie alle stationären Verteilungen von 

r) Wie sehen die stationären Verteilungen von symmetrischen Ketten, Irrfahrten auf ungerichteten Graphen, Warteschlangen und der Gambler's-Ruin-Kette aus?

s) Weisen Sie nach, dass die Binomialverteilung eine stationäre Verteilung der Ehrenfest-Kette ist.

Reguläre Sprachen

a) Wie sind reguläre Sprachen definiert?

b) Welche Komponenten besitzt ein DFA, was ist die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta}$ und wie ist die von einem DFA A akzeptierte Sprache definiert?

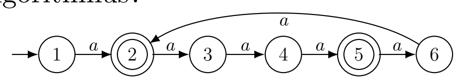
c) Wahr oder falsch: Jeder DFA besitzt mindestens einen akzeptierenden Zustand.

d) Wie sehen DFAs für die Sprachen $L_1 := \{a,b\}^* \cdot \{abaa, bb\}$ und $L_2 := \{c^{3k} : k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ aus?

e) Was ist die Verschmelzungsrelation, wie ist sie definiert und wozu ist sie gut?

f) Wie zeigt man die Inäquivalenz zweier Zustände q_i und q_j eines DFAs A? Wie zeigt man die Äquivalenz zweier Zustände?

g) Wie funktioniert der Minimierungsalgorithmus?

h) Ist der folgende Automat minimal? 

i) Wie ist die Nerode-Relation $\equiv_L$ einer Sprache L definiert?

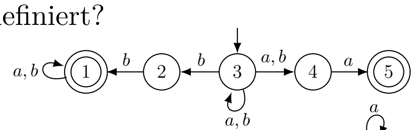
j) Wie sehen die Nerode-Klassen von $L := \{w \in \{a,b,c\}^* : |w| \text{ ist ungerade}\} \cap \{c^n ab : n \in \mathbb{N}\}$ aus? Wie sieht der dazugehörige Nerode-Automat aus?

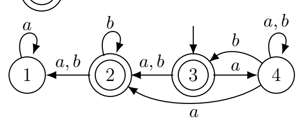
k) Wie hängen der Index einer Sprache L und ein DFA für L zusammen?

l) Zeigen Sie, dass die Sprache $L := \{a^t b^r c^s : t, r, s \in \mathbb{N},\ r > s\}$ nicht-regulär ist.

m) Wahr oder falsch: Die Sprache $L := \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^i b^j c^k : i,j,k \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

n) Wie ist die von einem NFA akzeptierte Sprache definiert?

o) Welche Sprache akzeptiert der folgende NFA? 

p) Wandeln Sie folgenden NFA mit Potenzmengenkonstruktion in einen DFA um. Ist dieser DFA minimal? 

q) Welche Sprachen beschreiben die regulären Ausdrücke $R_1 := (a|ab)^* \cdot \emptyset^*$ und $R_2 := \left(c(a^*|b)^*c\right)^*$?

r) Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck R mit $L(R) = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ enthält nicht das Teilwort } ab\}$.

s) Seien R_1 und R_2 reguläre Ausdrücke. Wahr oder falsch: $L((R_1|R_2)^*) = L(R_1^*|R_2^*)$.

t) Wahr oder falsch: Es gibt Sprachen L_3 und L_4 mit $L_3 \subseteq L_4$, sodass (i) L_3 nicht-regulär, aber L_4 regulär ist; (ii) L_3 regulär, aber L_4 nicht-regulär ist.

u) Wahr oder falsch: Jeder reguläre Ausdruck, der einen Kleene-Stern enthält, erzeugt eine unendliche Sprache.

Kontextfreie Grammatiken

a) Welche Komponenten besitzt eine kontextfreie Grammatik (KFG)?

b) Bestimmen Sie eine KFG G für die Sprache $L := \{a^i b^j c^k : i, j, k \in \mathbb{N},\ i \neq j \text{ oder } j \neq k\}$.

c) Bestimmen Sie eine KFG G für die Sprache aller wohlgeformten Klammerausdrücke über dem Alphabet $\Sigma = \{\ (\ ,\ )\ ,\ [\ ,\ ]\ \}$.

d) Welche Sprache erzeugt die KFG $G = (\Sigma, V, S, P)$ mit $\Sigma := \{a, b, c\}$, $V := \{A, B, C\}$, $S := A$ und $P := \{A \to aAa \mid B \mid C,\ B \to bBb,\ C \to cC \mid A\}$?

e) Konstruieren Sie eine KFG G_{AL} für die Sprache $\{\varphi \in \mathrm{AL} : \mathrm{Var}(\varphi) \subseteq \{V_1, V_2, V_3\}\}$ aller syntaktisch korrekter aussagenlogischer Formeln auf den Variablen V_1, V_2, V_3.

f) Wie sehen Ableitungen und Ableitungsbäume für das Wort $(1 + 2 + 3) \cdot (3 + 2) - (1)$ bezüglich der Grammatik G_{AA} aus der Vorlesung aus?

g) Ist die Sprache $\{a, b\}^* \cdot \{abba\}$ kontextfrei?

h) Können Sie drei kontextfreie Sprachen nennen, die nicht regulär sind?

i) Wie beweist man Eigenschaften von kontextfreien Sprachen? (Z. B.: „Sei L durch die kontextfreie Grammatik $G := (\Sigma, V, S, P)$ mit $\Sigma := \{a, b\}$, $V := \{S\}$ und $P := \{S \to \varepsilon \mid aaaSbbb\}$ gegeben. Für alle $w \in L$ gilt: $|w|_a$ ist durch drei teilbar.“)