Theoretische Informatik 1 / Algorithmentheorie

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Georg Schnitger,
Dipl. Inf. Bert Besser,
Dipl. Inf. Matthias Poloczek

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Blatt 9

Ausgabe: 17.01.2013
Abgabe: 24.01.2013 **vor** der Vorlesung

9.1. Aufgabe (3+3+4) *Der Reduktionsbegriff*

In der Vorlesung haben wir die polynomielle Reduktion $L \leq_p K$ kennengelernt. Wenn es für K einen effizienten Algorithmus gibt, dann gibt es somit auch für L einen effizienten Algorithmus. In dieser Aufgabe stellen wir alternative Formalisierungen des Reduktionsbegriffs zur Diskussion.

Entscheide, ob die jeweils angegebene Folgerung zutreffend ist. Beachte: Ein Algorithmus läuft in linearer Zeit, wenn er für Eingabe w in Zeit $O(|w|)$ rechnet. Er läuft in quadratischer Zeit, wenn er in Zeit $O(|w|^2)$ rechnet.

a.)

$$L \leq_p K : \text{es gibt einen Algorithmus } M\text{, der in linearer Zeit läuft,}$$
$$\text{so dass: } w \in L \iff M(w) \in K.$$

Folgerung: Wenn es für K einen Algorithmus mit linearer Laufzeit gibt, dann auch für L.

b.)

$$L \leq_p K : \text{es gibt einen Algorithmus } M\text{, der in quadratischer Zeit läuft,}$$
$$\text{so dass: } w \in L \iff M(w) \in K.$$

Folgerung: Wenn es für K einen Algorithmus mit quadratischer Laufzeit gibt, dann auch für L.

c.) Ein ungerichteter Graph G gehört zur Sprache *Cycle* genau dann, wenn G mindestens einen Kreis enthält. Wir wollen zeigen, dass *Cycle* NP-hart ist.

Wir reduzieren nun wie folgt das Entscheidungsproblem *HC* auf *Cycle*. Die Transformation ist trivial, denn die transformierende Turingmaschine ändert nichts: Der Eingabegraph für *HC* ist also auch der Eingabegraph für *Cycle*. Wir beobachten: Falls $G \in HC$ gilt, besitzt G einen Hamiltonschen Kreis. Somit gilt auch $G \in Cycle$. Weil *HC* ein NP-hartes Problem ist (vgl. S. 116 im Skript), folgt aus der gezeigten Reduktion, dass *Cycle* ebenfalls NP-hart ist.

Finde den Fehler in der Argumentation. Kannst Du einen Linearzeit Algorithmus angeben, der entscheidet, ob ein ungerichteter Graph einen Kreis enthält?

9.2. Aufgabe (7) *Laborsicherheit*

In einem Chemielabor wird eine Vielzahl von Chemikalien in Sicherheitsschränken gelagert. Dabei ist es verboten, bestimmte Chemikalien zusammen im gleichen Schrank zu lagern. Die Menge der in Betracht kommenden Chemikalien bezeichnen wir mit C. Entsprechend handelt es sich bei den Verboten um Teilmengen $v_i \subseteq C$ (für $i = 1, \ldots, n$). Da diese Sicherheitsvorschriften (die verbotenen Teilmengen) häufig aktualisiert werden und das Labor nicht beliebig viele teure Sicherheitsschränke kaufen will, soll das folgende Bepackungsproblem gelöst werden.

Problem 1 Gefahrgutlagerung

`Input`:
- Eine Menge $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ von Chemikalien,
- ein Verbotsliste $V = v_1, \ldots, v_m$ von Teilmengen $v_i \subseteq C$, wobei keine zwei Chemikalien aus v_i gemeinsam in einem Schrank gelagert werden dürfen,
- eine Maximalzahl $M \in \mathbb{N}$ von verfügbaren Schränken.

`Frage`: Können die Chemikalien so in M Schränke verteilt werden, dass kein Schrank eine verbotene Kombination enthält?.

Zeige mittels *Graph-Färbbarkeit* $\leq_P$ *Gefahrgutlagerung* und *Gefahrgutlagerung* $\in$ NP, dass Gefahrgutlagerung NP-vollständig ist. Es kann angenommen werden, dass *Graph-Färbbarkeit* NP-vollständig ist.

Problem 2 Graph-Färbbarkeit

`Input`:
- Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- Schranke $k \in \mathbb{N}$

`Frage`: Kann jedem Knoten v aus V eine Farbe aus $\{1, \ldots, k\}$ zugeordnet werden, so dass für alle Kanten $\{u, v\}$ in E die Knoten u und v verschiedene Farben erhalten? Benachbarte Knoten sind also stets unterschiedlich gefärbt.

9.3. Aufgabe (7) *Kombinatorische Auktionen*

In einer kombinatorischen Auktion stehen n Gegenstände $A_1, \ldots, A_n$ zur Versteigerung an. Es gibt m Bieter, die jeweils ein Gebot abgeben. Das Gebot des i-ten Bieters besteht aus einer Teilmenge $S_i \subseteq \{A_1, \ldots, A_m\}$ der Gegenstände, die Bieter i erwerben möchte und dem Preis x_i, den er bereit ist, für den Erwerb der kompletten Menge S_i zu zahlen.

Der Auktionator versucht nach dem Einsammeln aller Gebote einen möglichst hohen Erlös zu erzielen, indem er für jeden Bieter entscheidet, ob dieser die Menge S_i seiner gewünschten Gegenstände erhält oder nicht. Wenn Bieter i den Zuschlag erhält, dann müssen allerdings sämtliche gewünschten Gegenstände geliefert werden; es ist nicht erlaubt, nur einen Teil der Gegenstände in S_i an Bieter i zu geben. Da jeder der Gegenstände nur einmal vorhanden ist, müssen die vom Auktionator ausgewählten Mengen also disjunkt sein. Im Entscheidungsproblem bekommen wir wieder zusätzlich eine Schranke $k \in \mathbb{N}$ als Eingabe und fragen: Gibt es eine Zuteilung der Gegenstände, so dass ein Auktionserlös von mindestens k erzielt wird?

Beispiel: $m = 3$ Bieter, $n = 3$ Gegenstände, $k = 2$. Gebote $S_1 = \{A_1, A_2\}, S_2 = \{A_1, A_3\}, S_3 = \{A_2, A_3\}, x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Dann ist die Antwort nein, denn höchstens eines der Gebote kann angenommen werden, da jedes Gebot die beiden anderen blockiert.

Zeige, dass das Entscheidungsproblem der kombinatorischen Auktion NP-vollständig ist.
Hinweis: Independent Set.