Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2017

Georg Schnitger
Philipp Tertel
Hung The Tran

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 8

Ausgabe: 13.06.17
Abgabe: 20.06.17

Auf diesem Blatt können Sie 8 Bonuspunkte erwerben.

Aufgabe 8.1 *Äquivalenz von NFAs* (2+5+1 Punkte)

Wenn überprüft werden soll, ob $L(A_1) = L(A_2)$ für zwei DFAs gilt, ob also A_1 und A_2 äquivalent sind, dann gelingt dies in Zeit $O(n \log_2 n)$, wenn n das Maximum der Zustandszahlen von A_1 und A_2 ist: Man bestimmt den Äquivalenzklassenautomat A_1' von A_1 bzw A_2' von A_2 und überprüft, ob A_1', A_2' isomorph sind. Das Äquivalenzproblem für NFAs ist ungleich schwieriger.

Wir beginnen mit dem Universalitätsproblem „$L(A) \stackrel{?}{=} \Sigma^*$“ für einen NFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$. Es sei $n = |Q|$.

a) Zeigen Sie: Wenn $L(A) \neq \Sigma^*$, dann verwirft A ein Wort $w \in \Sigma^*$ der Länge höchstens 2^n.

b) Entwerfen Sie einen nichtdeterministischen Algorithmus, der die Sprache der Nicht-Universalität mit linearem Speicherplatz akzeptiert: Ihr Algorithmus muss einen NFA also genau dann akzeptieren, wenn $L(A) \neq \Sigma^*$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass das Universalitätsproblem in PSPACE liegt.

Kommentar: In der Vorlesung wird gezeigt, dass das Universalitätsproblem **PSPACE**-hart ist und wir können folgern, dass das Universalitätsproblem **PSPACE**-vollständig ist. Mit ähnlichen Argumenten kann auch gezeigt werden, dass das Äquivalenzproblem für NFAs zur Klasse **PSPACE** gehört. Da das Äquivalenzproblem aber mindestens so schwierig wie das Universalitätsproblem ist, ist auch das Äquivalenzproblem **PSPACE**-vollständig.

Aufgabe 8.2 *NL, NP und PSPACE* (3+2+3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass **NL** eine echte Teilmenge von **PSPACE** ist.

Kommentar: Es ist nicht bekannt, ob **DL** oder **NL** echte Teilmengen von **NP** sind.

(b) **PSPACE**-vollständige Sprachen sind mindestens so schwierig wie **NP**-vollständige Sprachen, in aller Wahrscheinlichkeit aber noch viel schwieriger. Warum?

(a) Zeigen Sie: Wenn die Sprache L **PSPACE**-hart ist, dann ist L auch NP-hart.

(b) Zeigen Sie: Wenn eine **PSPACE**-harte Sprache in **NP** liegt, dann folgt **NP** = **PSPACE**.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 ***Die exakte Komplexität bestimmen*** (6+2 Punkte)

a) Im Katze-Maus-Spiel ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ gegeben sowie Positionen $k \in V$ für die Katze, $m \in V$ für die Maus und $l \in V$ für das Mauseloch. Es gelte $k \neq l$.

Die beiden Spieler ziehen abwechselnd. Katze beginnt und wechselt zu einem Nachbarn k' von k (mit $k' \neq l$), wobei Katze aber auch in k verbleiben darf – k wird also auch als Nachbarn von sich selbst aufgefasst. Danach wird k aktualisiert ($k := k'$). Danach ist Maus am Zug und wählt einen Nachbarn m' von m. Auch diesmal wird m als sein eigener Nachbar aufgefasst und die Position m wird aktualisiert ($m := m'$). Gilt irgendwann $k = m$, dann endet das Spiel und Katze gewinnt. Gilt irgendwann $m = l$, endet das Spiel ebenfalls und Maus gewinnt.

Wir definieren die Sprache

$$KM := \{(G, k, m, l) \ : \ k \neq l \text{ und Katze hat eine Gewinnstrategie g } \}.$$

Gehört KM zu **P**, ist KM **NP**-vollständig oder sogar **PSPACE**-vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Für welche „Konfigurationen“ (k, m, l) ist es *sofort* klar, dass Katze eine Gewinnstrategie hat?

b) Zeigen Sie, dass es eine kontextsensitive Sprache L gibt, die **PSPACE**-vollständig ist. Das Wortproblem für kontextsensitive Sprachen ist somit in aller Wahrscheinlichkeit nicht effizient lösbar.

Aufgabe 8.4 *Die Sprache* ***BIPARTIT*** (6+2 Punkte)

Während BIPARTIT aus allen ungerichteten, bipartiten Graphen besteht, ist U-REACHABILITY die Menge aller ungerichteten Graphen G, die einen Weg zwischen ausgezeichneten Knoten s und t besitzen.

(a) Zeigen Sie, dass BIPARTIT in **DL** liegt.

Hinweis: Sie können benutzen, dass U-REACHABILITY in **DL** liegt.

Wenn der ungerichtete Graph G Eingabe für U-REACHABILITY ist, dann transformieren Sie G in einen oder mehrere geeignete Graphen G' und wenden dort die **DL**-Lösung für U-REACHABILITY auf G' an.

(b) Zeigen Sie, dass **DL** = **NL** gilt, wenn BIPARTIT eine **NL**-vollständige Sprache ist.