Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2017

Georg Schnitger
Philipp Tertel
Hung The Tran

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 9

Ausgabe: 20.06.17
Abgabe: 27.06.17

Sie können auf diesem Blatt bis zu 4 Extrapunkte erwerben.

Aufgabe 9.1 *Die parallele Komplexität regulärer Sprachen* (4 Punkte)

Ein DFA $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ sei gegeben. Entwerfen Sie eine uniforme Schaltkreisfamilie $(S_n : n \in \mathbb{N})$, sodass S_n genau die Worte in $L(A) \cap \Sigma^n$ akzeptiert. Die Tiefe von S_n soll durch $O(\log_2 n)$ beschränkt sein, die Größe soll höchstens $O(n)$ betragen. (Es ist also $L(A) \in \textbf{DEPTH-SIZE}_{\textbf{uniform}}(\log_2 n, n)$ zu zeigen. Für eine Eingabe w von A ist Größe und Tiefe von S_n in Abhängigkeit von der Eingabelänge $n := |w|$ zu analysieren.)

Hinweis: Verwenden Sie einen Divide & Conquer-Ansatz. Für eine Eingabe $w \in \Sigma^n$ mit $w = uv$ ist die Bestimmung von $q = \delta(q_0, u)$ ein naheliegendes Teilproblem. Aber wie kann die Bestimmung von $\delta(q, v)$ gleichzeitig ablaufen, ohne dass der Zustand q bekannt ist?

Aufgabe 9.2 *Boolesche Formeln* ($2 + 3 + 3 = 8$ Punkte)

Eine **Boolesche Formel** ist ein Schaltkreis S, in dem jedes Gatter den Ausgrad 1 besitzt: Mit anderen Worten, der Graph von S ist ein gerichteter Baum, dessen Kanten von den „Blättern an aufwärts“ gerichtet sind. Eingabevariablen dürfen mehrfach unter den Blättern des Baums vorkommen. Es ist ebenfalls erlaubt, dass Blätter die konstante Ausgabe 0 oder 1 geben.

Sei L eine Sprache.

a) Zeigen Sie: Jeder Baum mit n Knoten und maximalem Eingrad höchstens zwei besitzt einen Knoten v, sodass der Teilbaum mit Wurzel v mindestens $n/3$ und höchstens $2n/3$ Knoten besitzt.

b) Wenn L eine Boolesche Formel der Größe $s(n)$ besitzt, dann besitzt L eine Boolesche Formel der Tiefe $\mathcal{O}(\log_2 s(n))$.

c) Zeigen Sie: Eine Sprache L besitzt eine Familie $(F_n : n \in \mathbb{N})$ von Booleschen Formeln mit polynomiell vielen Knoten $\Longleftrightarrow L \in \mathbf{NC}^1$.

(Bitte beachten Sie, dass wir *nicht* die Anforderung der Uniformität stellen.)

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3 ***P-Vollständigkeit*** (4 + 6 + 6 = 16 Punkte)

a) Ein *Literal* ist eine aussagenlogische Variable oder ihre Negation. Ein *Disjunktionsterm* wird durch eine endliche Menge D von Literalen repräsentiert und stimmt überein mit der Disjunktion
$$\bigvee_{\ell \in D} \ell.$$
Eine *Einser-Klausel* ist ein Disjunktionsterm D mit $|D| = 1$. In einem *Einser-Resolutionsschritt* darf aus einer Einser-Klausel $\{\ell\}$ und einem Disjunktionsterm $\{\neg\ell, \ell_1, \ldots, \ell_m\}$ der neue Disjunktionsterm $\{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$ gefolgert werden.

Sei D ein Disjunktionsterm und sei $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} D_i$ eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform (KNF) mit Disjunktionstermen $D_1, \ldots, D_m$. Ein **Einser-Resolutionsbeweis von D aus φ** ist eine Folge $B_1, \ldots, B_m$ von Disjunktionstermen mit $B_m = D$, sodass B_i für jedes i $(1 \leq i \leq m)$ mit einem Disjunktionsterm von φ übereinstimmt oder durch einen Einser-Resolutionsschritt aus früheren Disjunktionstermen B_j und B_k $(1 \leq j, k < i)$ gefolgert werden kann.

Im Problem der **Einser-Resolution** ist eine KNF ψ und ein Disjunktionsterm D gegeben und es ist zu entscheiden, ob es einen Einser-Resolutionsbeweis von D aus ψ gibt.

i) Zeigen Sie: Das Problem der Einser-Resolution liegt in **P**.

ii) Zeigen Sie: Das Problem der Einser-Resolution ist **P**-vollständig.

Hinweis: Zeigen Sie die Reduktion M-CVP $\leq_{\text{LOG}}$ Einser-Resolution. Einem monotonem Schaltkreis S (mit Senke s) und einer Eingabe y muss also ein Disjunktionsterm $D_{S,y}$ und eine KNF $\psi_{S,y}$ zugewiesen werden, sodass
$$S(y) = 1 \iff \text{es gibt einen Einser-Resolutionsbeweis von } D_{S,y} \text{ aus } \psi_{S,y}.$$
Weisen Sie jedem Gatter g eine aussagenlogische Variable V_g zu und setzen $D_{S,y} := V_s$ (für die der Senke s zugewiesene Variable V_s). Jedes Gatter ist durch einen oder mehrere Disjunktionsterme zu modellieren. Schließlich kann $\psi_{S,y}$ als Konjunktion all dieser Disjunktionsterme definiert werden.
Wie sehen diese Terme für ein UND-Gatter $g = g_1 \wedge g_2$, ein ODER-Gatter $g = g_1 \vee g_2$ bzw. ein Eingabegatter $g = x_i$ aus? Wie sollte die Eingabe y modelliert werden?

b) Im **Wortproblem für kontextfreie Grammatiken** sind eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, P, S)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ gegeben. Es ist zu entscheiden, ob $w \in L(G)$ gilt.

Zeigen Sie: Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist **P**-hart.

Hinweis: Zeigen Sie die Reduktion M-CVP $\leq_{\text{LOG}}$ Wortproblem für kontextfreie Grammatiken. Dazu müssen Sie für einen monotonen Schaltkreis S und eine Eingabe y eine kontextfreie Grammatik $G_{S,y} = (\Sigma, V, S, P)$ (mit $\Sigma = \{0, 1\}$) und ein Wort $w_{S,y}$ wählen, sodass
$$S(y) = 1 \iff w_{S,y} \in L(G_{S,y}).$$
Setzen Sie $w_{S,y} = \varepsilon$ und wählen Sie für jedes Gatter g eine eigene Variable. Das Startsymbol sollte dem Ausgabegatter von S entsprechen.