

# Speicherplatz-Komplexität

Warum sollte uns die Ressource „Speicherplatz“ interessieren?

Um

- ▶ die Komplexität der Berechnung von **Gewinnstrategien** für viele nicht-triviale 2-Personen Spiele zu charakterisieren.
- ▶ die Komplexität der folgenden Probleme für **NFAs** zu klären:
  - (?) Akzeptiert ein NFA eine gegebene Eingabe?
  - (?) Sind zwei NFAs äquivalent?
  - (?) Minimiere einen NFA.
- ▶ die Komplexität des **Wortproblems für kontextfreie Sprachen** oder kontextsensitive Sprachen zu untersuchen.
- ▶ „nicht-klassische“ Berechnungsarten wie **Randomisierung** oder **Quantenberechnungen** mit deterministischen Berechnungen zu vergleichen.
- ▶ die Klasse **parallelisierbarer Probleme** besser zu verstehen.

Wie misst man Speicherplatz?

# I-O Turingmaschinen

Eine **I-O Turingmaschine**  $M$  besitzt drei ein-dimensionale Bänder mit jeweils einem Kopf, wobei jeder Kopf in einem Schritt (höchstens) zur linken oder rechten Nachbarzelle der gegenwärtig besuchten Zelle wandern darf.

- 1 Das erste Band ist das **read-only Leseband**, das die Eingabe speichert.
- 2 Das zweite Band ist das **read-write Arbeitsband**, das aus  $s(n)$  Zellen besteht.
- 3 Das dritte Band ist das **write-only Ausgabeband**. (Wir interpretieren das Drucken einer 0 (1), als das Verwerfen (Akzeptieren) der Eingabe).

Die maximale Anzahl der während der Berechnung für Eingabe  $w$  besuchten Zellen des zweiten Bands bezeichnen wir mit  $DSPACE_M(w)$ .

# Wir messen den Speicherplatz

$M$  sei eine I-O Turingmaschine.

- (a) Der Speicherplatzbedarf von  $M$  für Eingabelänge  $n$  ist

$$\text{DSPACE}_M(n) = \max\{\text{DSPACE}_M(w) \mid w \in \Sigma^n\}.$$

- (b) Für  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist

$$\text{DSPACE}(s) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L(M) = L \text{ für eine I-O TM } M \text{ mit } \text{DSPACE}_M = \mathcal{O}(s)\}$$

die Klasse aller auf Platz  $\mathcal{O}(s(n))$  lösbaren Entscheidungsprobleme.

- (c) Die Komplexitätsklasse DL besteht aus allen mit logarithmischem Speicherplatzbedarf erkennbaren Sprachen, also

$$\text{DL} = \text{DSPACE}(\log_2 n).$$

- (d) Die Komplexitätsklasse PSPACE besteht aus allen mit polynomielltem Speicherplatzbedarf erkennbaren Sprachen, also

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{DSPACE}(n^k).$$

# Platzbedarf nichtdeterministischer Rechnungen

Für eine nichtdeterministische TM  $M$  ist  $\text{NSPACE}_M(w)$  für eine Eingabe  $w$  der **maximale** Speicherplatzbedarf einer Berechnung für  $w$ .

(a) Der Speicherplatzbedarf von  $M$  für Eingabelänge  $n$  ist

$$\text{NSPACE}_M(n) = \max\{\text{NSPACE}_M(w) \mid w \in \Sigma^n\}.$$

(b) Die Klasse aller mit Speicher  $\mathcal{O}(s)$  lösbaren Probleme ist

$$\text{NSPACE}(s) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{es gibt eine nichtdeterministische I-O TM } M \text{ mit } L(M) = L \text{ und } \text{NSPACE}_M = \mathcal{O}(s)\}.$$

(c) Die Komplexitätsklasse NL besteht aus allen nichtdeterministisch mit logarithmischem Speicherplatzbedarf erkennbaren Sprachen, also

$$\text{NL} = \text{NSPACE}(\log_2 n).$$

(d) Die Komplexitätsklasse  $\text{NPSPACE}$  besteht aus allen nichtdeterministisch, mit polynomielltem Speicherplatzbedarf erkennbaren Sprachen, also

$$\text{NPSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{NSPACE}(n^k).$$

# Speicherkomplexität: Die wichtigen Fragestellungen

? Ist **DL** eine echte Teilmenge von **NL**?

- (\*) Wie sehen die für DL **schwierigsten** Probleme in NL aus?
- (\*) Für welches kleinste  $s$  gilt

$$\text{NL} \subseteq \text{DSPACE}(s).$$

- (\*) Wenn  $L \in \text{NL}$ , ist dann auch  $\bar{L} \in \text{NL}$ ? D.h. ist NL **abgeschlossen unter Komplement**?

? Ist **NL** eine Teilmenge von **P**, und wenn ja, ist NL eine echte Teilmenge?

? Ist **P** eine echte Teilmenge von **PSPACE**?

- (\*) Wie sehen die für **P** schwierigsten Probleme in **PSPACE** aus?
- (\*) Ist **NP**  $\subseteq$  **PSPACE**? Kann man allgemeine probabilistische Berechnungen, die in polynomieller Zeit ablaufen, in PSPACE simulieren?
- (\*) Lassen sich Quantenberechnungen in PSPACE simulieren?

? Wie ordnen sich die Klassen regulärer, kontextfreier und kontextsensitiver Sprachen in die Speicherplatzklassen ein?

- (\*) Die Chomsky-Hierarchie.

# Sub-Logarithmischer Speicherplatz

# Sub-logarithmischer Speicher

Für Eingaben der Länge  $n$  wird **logarithmischer** Speicher  $\mathcal{O}(\log_2 n)$  benötigt, um sich an eine Eingabeposition zu erinnern.

Und wenn nur Speicher  $o(\log_2 n)$  zur Verfügung steht?

(a) Aus welchen Sprachen besteht die Komplexitätsklasse  $\text{DSPACE}(0)$ ?

- ▶ TMs ohne Speicher sind **Zwei-Weg** Automaten.

$\text{DSPACE}(0) =$  Die Klasse der regulären Sprachen.

(b) Leben **nicht-reguläre** Sprachen in  $\text{DSPACE}(o(\log_2 \log_2 n))$ ?

- ▶  $\text{bin}(i)$  sei die Binärdarstellung der Zahl  $i$  ohne führende Nullen.
- ▶ Für Eingabealphabet  $\Sigma = \{0, 1, \$\}$  definiere

$$\text{BIN} = \{\text{bin}(1)\$\text{bin}(2)\$\dots\$\text{bin}(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- ▶  $\text{BIN} \in \text{DSPACE}(\log_2 \log_2 n)$ :  $\text{bin}(i)$  besteht für  $i \leq n$  aus  $\leq \lceil \log_2 n \rceil$  Bits.
- ▶  $\text{BIN}$  ist nicht regulär.

$\text{DSPACE}(o(\log_2 \log_2 n)) =$  Die Klasse der regulären Sprachen.



# Logarithmischer Speicherplatz

DL und NL gehören zu den wichtigsten Speicherplatz-Klassen.

- Die Berechnungskraft ist durchaus signifikant, da die Maschinen sich jetzt Positionen in der Eingabe merken können.
- Viele Eigenschaften, die für DL und NL gelten, **verallgemeinern** sich auf beliebige Speicherplatzklassen.
  - Dieses Phänomen werden wir im Satz von Savitch und im Satz von Immerman-Szlepscenyi beobachten.
- Zusammenhang zur Berechenbarkeit in logarithmischer paralleler Zeit.

Wir beginnen mit deterministisch logarithmischem Platz.

Das Bandalphabet –solange konstant groß – kann beliebig gewählt werden.

- Statt nur ein Arbeitsband können wir uns **konstant viele Arbeitsbänder** (mit jeweils einem Lese-Schreibkopf) erlauben.
  - ▶ Wir können uns das Arbeitsband in Spuren unterteilt denken.
- Statt nur einen Lesekopf auf dem Eingabeband können wir uns **konstant viele Leseköpfe** erlauben.
  - ▶ Speichere die Position jedes Lesekopfes auf dem Arbeitsband
  - ▶ und benutze einen Zähler, um die Position zu erreichen.

PALINDROM  $\in$  DL. (**PALINDROM** ist die Menge aller Palindrome über dem Alphabet  $\{0, 1\}$ .)

1. Arbeite mit zwei Leseköpfen:
  - ▶ der erste Kopf bleibt auf der ersten Eingabeposition stehen,
  - ▶ der zweite Kopf läuft zur letzten Eingabeposition.
2. Die beiden Köpfe vergleichen alle Buchstabenpaare  $(w_i, w_{|w|-i+1})$ , indem sie aufeinander zulaufen.

DLund NL,  
Was kann man auf logarithmischem Platz rechnen?

In DL liegen

- 1 alle **regulären** Sprachen,
- 2 **einige kontextfreien Sprachen** wie etwa
  - ▶ die Palindromsprache,
  - ▶ die Dycksprache mit beliebig vielen Klammertypen,
- 3 sogar **einige** kontextsensitive Sprachen wie etwa  $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,
- 4 die Addition und Multiplikation von Zahlen in Binärdarstellung (und damit auch die Auswertung von Polynomen)
- 5 die Matrizenmultiplikation,
- 6 sogar **U-REACHABILITY**, die Menge aller **ungerichteten** Graphen  $G$ , die einen Weg von Knoten 1 nach Knoten 2 besitzen,
  - ▶ Der Graph  $G$  werde durch seine Adjazenzmatrix repräsentiert.
  - ▶ Der Nachweis ist sehr kompliziert.

**D-REACHABILITY** die Menge aller **gerichteten** Graphen  $G$ , die einen Weg von Knoten 1 nach Knoten 2 besitzen, gehört wahrscheinlich **nicht** zu DL.

- (a) Die I-O Turingmaschine  $M$  arbeite mit Speicherplatz  $s$ . Dann ist die Laufzeit von  $M$  für Eingaben der Länge  $n$  durch  $n \cdot 2^{O(s(n))}$  beschränkt.
- (b) Es gelte  $s(n) \geq \log_2 n$ . Dann ist

$$\text{DSPACE}(s) \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{DTIME}(2^{k \cdot s}).$$

- (c) Als Konsequenz folgt  $\text{DL} \subseteq \text{P}$ .

- Teil (b) folgt aus Teil (a), wenn wir die Annahme  $s(n) \geq \log_2 n$  beachten.
- Teil (c) folgt aus Teil (b).

Idee für Teil (a): Bei zu langer Laufzeit sollte eine platz-beschränkte Maschine in eine Endlosschleife geraten!

Für eine I-O Turingmaschine besteht eine **Konfiguration** aus

- 1 dem gegenwärtigen Zustand,
- 2 der Position des Lesekopfs,
- 3 der Position des Kopfs auf dem Arbeitsband und
- 4 dem Inhalt des Arbeitsbands.

- Wenn eine I-O Turingmaschine  $M$  eine Konfiguration zweimal annimmt, dann steckt  $M$  in einer Endlosschleife.
- Für Speicher  $s$  und Eingabelänge  $n$  gibt es höchstens  $\mathcal{O}(n \cdot s2^{\mathcal{O}(s)}) = n \cdot 2^{\mathcal{O}(s)}$  Konfigurationen.
- Die Laufzeit von  $M$  ist durch die Anzahl der Konfigurationen beschränkt.



# Wie mächtig ist NL?

- **D-REACHABILITY** gehört wahrscheinlich nicht zu DL, wohl aber zu NL.
  - ▶ Eine nichtdeterministische Maschine rät einen Weg von Knoten 1 nach 2.
  - ▶ Gehört **D-UNREACHABILITY** zu NL? Ein gerichteter Graph gehört zu D-UNREACHABILITY, wenn  $G$  keinen Weg von Knoten 1 nach Knoten 2 besitzt.
- Das **Wortproblem für NFAs** (akzeptiert ein gegebener NFA eine gegebene Eingabe) gehört zu NL, wahrscheinlich aber nicht zu DL.
- **2-SAT**, das Erfüllbarkeitsproblem für KNF-Formeln mit höchstens zwei Literalen pro Klausel gehört zu NL.
- Es gibt **kontextfreie Sprachen**, die zu NL aber wahrscheinlich nicht DL gehören.
  - ▶ Gehören alle kontextfreien Sprachen zu NL?

Ist DL eine echte Teilmenge von NL?

# LOGSPACE-Reduktionen

Ist D-REACHABILITY deterministisch mit logarithmischem Speicherplatz erkennbar?

- Wir zeigen, dass eine positive Antwort die Gleichheit  $DL = NL$  erzwingt:
  - ▶ Die wahrscheinliche Antwort ist also negativ.
- Insbesondere zeigen wir, dass D-REACHABILITY eine schwierigste Sprache in NL ist, wobei „Schwierigkeit“ gemessen wird durch

## LOGSPACE-Reduktionen.

$L$  ist LOGSPACE-reduzierbar auf  $K$ , geschrieben

$$L \leq_{\text{LOG}} K,$$

falls es eine (deterministische) I-O Turingmaschine  $M$  mit logarithmischem Speicherplatzbedarf gibt, so dass für alle Eingaben  $w \in \Sigma_1^*$ ,

$$w \in L \iff M(w) \in K.$$

- (a) Die Sprache  $K$  heißt **NL-hart**, falls  $L \leq_{\text{LOG}} K$  für alle Sprachen  $L \in \text{NL}$ .
- (b) Die Sprache  $K$  heißt **NL-vollständig**, wenn  $K$  NL-hart ist und  $K \in \text{NL}$ .

## Die wesentlichen Eigenschaften der LOGSPACE-Reduktion:

- Wenn  $L \leq_{\text{LOG}} K$  und wenn  $K \in \text{DL}$ , dann ist  $L \in \text{DL}$ .
  - ▶ Als Konsequenz:  **$\text{DL} = \text{NL}$ , wenn irgendeine NL-vollständige Sprache in DL liegt.**  
Die Sprache  $K$  sei NL-vollständig. Dann sind äquivalent

$$K \in \text{DL} \iff \text{DL} = \text{NL}.$$

- Wenn  $M \leq_{\text{LOG}} K$  und  $K \leq_{\text{LOG}} L$ , dann ist  $M \leq_{\text{LOG}} L$ .
  - ▶ Als Konsequenz: **Wie weist man nach, dass eine Sprache  $L$  NL-vollständig ist?**  
Wenn  $K$  NL-hart ist und wenn  $K \leq_{\text{LOG}} L$ , dann ist auch  $L$  NL-hart.

D-REACHABILITY ist NL-vollständig

$M$  sei eine **nichtdeterministische** Turingmaschine mit logarithmischem Speicherplatz. Wir definieren das zentrale Konzept des

**Berechnungsgraphen**  $G_M(w)$  von  $M$  auf Eingabe  $w$ .

- ▶ Die **Knoten** von  $G_M(w)$  entsprechen den Konfigurationen.
- ▶ Wir fügen eine **Kante** von Konfiguration  $c$  nach Konfiguration  $d$  ein, wenn  $M$  (mit Eingabe  $w$ ) in einem Schritt von  $c$  nach  $d$  gelangen kann.

$G_M(w)$  kann von einer **deterministischen** I-O Turingmaschine mit logarithmischem Speicherplatz berechnet werden.

- Stelle deterministisch, auf logarithmischem Platz, fest, ob ein 1-Schritt Übergang von einer Konfiguration  $c_1$  zu einer Konfiguration  $c_2$  möglich ist.
- Kein Problem, denn der Speicher für  $c_1$  wie auch für  $c_2$  ist logarithmisch.

- ① D-REACHABILITY liegt offensichtlich in NL.
- ② **Zeige:**  $L \leq_{\text{LOG}} \text{D-REACHABILITY}$  für eine beliebige Sprache  $L \in \text{NL}$ .
  - ▶ Es ist  $L = L(M)$  für eine nichtdeterministische I-O Turingmaschine  $M$  mit logarithmischem Speicher.
  - ▶ Der Berechnungsgraph  $G_M(w)$  kann von einer deterministischen I-O TM berechnet werden.
    - ★ Der Knoten der Anfangskonfiguration erhält den Namen 1.
    - ★ Zusätzlich füge eine Kante von jeder akzeptierenden Haltekonfiguration zu einem neuen Knoten ein, dem wir den „Namen“ 2 geben.

$$w \in L \iff G_M(w) \in \text{D-REACHABILITY.}$$

# Weitere NL-vollständige Sprachen

- 1 Das Leerheitsproblem für DFAs (Akzeptiert ein gegebener DFA irgendeine Eingabe?)
- 2 Die Simulation von NFAs (Akzeptiert ein gegebener NFA eine gegebene Eingabe?)
- 3 2-SAT
- 4 Das Wortproblem für bestimmte kontextfreie Sprachen.

Später: Wenn  $L$  NL-vollständig ist, dann ist auch die Komplementsprache NL-vollständig.



# Wie mächtig ist NL?

$$DL \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP.$$

- Die Beziehungen  $DL \subseteq NL$  sowie  $P \subseteq NP$  sind offensichtlich.
- Es genügt der Nachweis von  $NL \subseteq P$ .
  - ▶ Für eine beliebige Sprache  $L$  in  $NL$  gilt  $L \leq_{\text{LOG}} \text{D-REACHABILITY}$ .
  - ▶ Wenn  $L \leq_{\text{LOG}} K$  und  $K \in P$ , dann ist auch  $L \in P$ .
    - ★ Warum?
    - ★ Deterministische I-O Turingmaschinen mit logarithmischem Speicher besitzen eine polynomielle Laufzeit.
  - ▶ Da  $\text{D-REACHABILITY}$  in  $P$  liegt, folgt somit auch  $L \in P$ .

# Die Chomsky-Hierarchie: Worum geht's?

# Die Chomsky-Hierarchie

- ① Grammatiken ohne jede Einschränkung heißen **Typ-0**-Grammatiken. Die entsprechende Sprachenfamilie ist

$$\mathcal{L}_0 = \{L(G) \mid G \text{ ist vom Typ 0}\}$$

- ② Eine Grammatik  $G$  mit Produktionen der Form

$$u \rightarrow v \quad \text{mit } |u| \leq |v|$$

heißt **Typ 1** oder **kontextsensitiv**. Die zugehörige Sprachenfamilie ist

$$\mathcal{L}_1 = \{L(G) \mid G \text{ ist vom Typ 1}\} \cup \{L(G) \cup \{\epsilon\} \mid G \text{ ist vom Typ 1}\}$$

- ③ **Kontextfreie** Grammatiken werden als Grammatiken vom **Typ 2** bezeichnet. Die zugehörige Sprachenfamilie ist

$$\mathcal{L}_2 = \{L(G) \mid G \text{ hat Typ 2}\}$$

- ④ Eine **reguläre** Grammatik heißt auch **Typ-3**-Grammatik. Die zugehörige Sprachenfamilie ist

$$\mathcal{L}_3 = \{L(G) \mid G \text{ hat Typ 3}\}$$

# Die Chomsky Hierarchie und Platzkomplexität

Wir zeigen:

- (a)  $\mathcal{L}_0$  ist die Klasse aller rekursiv aufzählbaren Sprachen.
- (b) Es gilt  $\mathcal{L}_1 = \text{NSPACE}(n)$  und  $\mathcal{L}_1$  ist die Klasse aller Sprachen, die von nichtdeterministischen Turingmaschinen auf linearem Platz erkannt werden.
- (c)  $\text{NL} \subseteq \text{LOGCFL} \subseteq \text{DSPACE}(\log_2^2 n)$ . LOGCFL ist der Abschluß kontextfreier Sprachen unter LOGSPACE-Reduktionen. Insbesondere gilt also  $\mathcal{L}_2 \subseteq \text{DSPACE}(\log_2^2 n)$ .
- (d) Die Klasse der regulären Sprachen stimmt mit der Klasse  $\text{DSPACE}(0)$  überein, es gilt also  $\mathcal{L}_3 = \text{DSPACE}(0)$ .
- (e)  $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$  und alle Inklusionen sind echt.

# Typ-0 Grammatiken

# Typ-0 Grammatiken

- $L(G)$  ist für jede Grammatik  $G$  rekursiv aufzählbar, d.h.  $L(G) = L(M)$  für eine Turingmaschine  $M$ .
  - ▶  $w \in L(G) \iff S \xrightarrow{*} w$ : Zähle alle möglichen Ableitungen auf:
    - ★ Wenn  $w \in L(G)$  werden wir eine Ableitung finden.
    - ★ Wenn  $w \notin L(G)$ , hält unser Programm nicht, aber was soll's?
- Andererseits sei  $L = L(M)$  für eine Turingmaschine  $M$ :  
Konstruiere eine Grammatik  $G$  mit  $L(M) = L(G)$ .
  - ▶ Berechnungen von  $M$  **beginnen** mit der Eingabe  $w$ ,  
Ableitungen von  $w$  **enden** mit  $w$ .
  - ▶ Also sollten wir die Grammatik  $G$  so konstruieren, dass Berechnungen von  $M$  „rückwärts“ simuliert werden.
    - ★ Die Grammatik  $G$  wird die Konfigurationen
$$\alpha_1 \cdots \alpha_{j-1} q \alpha_j \cdots \alpha_N$$
(Die Maschine befindet sich im Zustand  $q$ , hat den Bandinhalt  $\alpha_1 \cdots \alpha_N$  erstellt und liest das  $j$ te Symbol des Bandes)
    - rückwärts konstruieren.
    - ★ Wir nehmen an, dass  $M$  nur einen **akzeptierenden Zustand  $q_a$**  besitzt und dass akzeptierende Berechnungen mit dem leeren Band enden. Weiterhin nimmt  $M$  den Zustand  $q_0$  genau einmal an und zwar zu Beginn der Rechnung.

$G := (\Sigma, V, S, P)$  mit der Variablenmenge  $V := (\Gamma \setminus \Sigma) \cup Q \cup \{\epsilon\}$  und  $S := q_a$ .

- Erzeuge den von  $M$  benutzten Bandbereich durch  $q_a \rightarrow Bq_a \mid q_aB$ .
- Dann beginnt die Rückwärtsrechnung.
  - ▶ Wenn  $\delta(q, a) = (q', b, \text{links})$ , wählen wir für alle  $c \in \Gamma$  die Produktion

$$q'cb \rightarrow cqa.$$

Für die Konfiguration  $* \dots * q'cb * \dots *$  ist  $* \dots * cqa * \dots *$  eine Vorgänger-Konfiguration.

- ▶ Wenn  $\delta(q, a) = (q', b, \text{bleib})$ , fügen wir hinzu

$$q'b \rightarrow qa$$

Wenn die Konfiguration  $* \dots * q'b * \dots *$  schon erzeugt wurde, können wir jetzt die mögliche Vorgänger-Konfiguration  $* \dots * qa * \dots *$  erzeugen.

- ▶ Wenn  $\delta(q, a) = (q', b, \text{rechts})$ , dann fügen wir hinzu

$$bq' \rightarrow qa.$$

Wenn die Konfiguration  $* \dots * bq' * \dots *$  schon erzeugt wurde, können wir jetzt die mögliche Vorgänger-Konfiguration  $* \dots * qa * \dots *$  erzeugen.

Am Ende der Ableitung haben wir eine Konfiguration  $B^k q_0 w B^s$  erzeugt.

- Die zusätzlichen Produktionen

$$q_0 \rightarrow L$$

$$B L \rightarrow L$$

$$L a \rightarrow a L \quad \text{für } a \in \Sigma$$

$$L B \rightarrow L$$

$$L \rightarrow \text{das leere Wort}$$

garantieren jetzt, dass das Wort  $w$  abgeleitet wird.

- Wenn andererseits  $G$  eine Ableitung des Worts  $w$  besitzt, dann hat die Ableitung die Form

$$q_a \xrightarrow{*} B^k q_0 w B^s \xrightarrow{*} w$$

und  $w \in L(M)$  folgt.



# Kontextsensitive Grammatiken

# Typ-1 Grammatiken

Alle Produktionen

$$u \rightarrow v$$

einer kontextsensitiven Grammatik sind **längenerhaltend**: Es gilt  $|u| \leq |v|$ .

- Für jede Ableitung  $S \xrightarrow{*} w$  sind alle zwischenzeitlich erzeugten Strings in ihrer Länge durch  $|w|$  nach oben beschränkt.
  - ▶ Eine mögliche Ableitungsfolge kann auf Platz  $\mathcal{O}(|w|)$  geraten und verifiziert werden.
  - ▶ Jede kontextsensitive Sprache kann durch eine nichtdeterministische Turingmaschine auf linearem Platz erkannt werden.

Gibt es zu jeder Sprache  $L \in \text{NSPACE}(n)$  (mit  $\epsilon \notin L$ ) eine Typ-1 Grammatik  $G$  mit

$$L(G) = L?$$

# Die Konstruktion der Typ-1 Grammatik

Wir haben eine Typ-0 Grammatik  $G$  erzeugt, so dass

$$q_a \xrightarrow{*} B^k q_0 w B^s \iff w \in L(M). \quad (1)$$

gilt. Alle Produktionen in  $q_a \xrightarrow{*} B^k q_0 w B^s$  sind längenerhaltend.

- Wenn die nichtdeterministische TM  $M$  mit linearem Platz arbeitet, dann gibt es eine äquivalente „in-place“ TM  $M'$ :

*Vergrößere das Bandalphabet entsprechend.*

- Für  $M'$  erhalten wir somit aus (1)

$$q_a \xrightarrow{*} q_0 w \iff w \in L(M') = L(M)$$

- ▶ Wenn  $L(M) \in \text{NSPACE}(n)$ , dann ist  $q_0 L(M)$  kontextsensitiv.
- ▶ Zeige: Wenn  $q_0 L(M)$  kontextsensitiv ist, dann auch  $L(M) \setminus \{\epsilon\}$ .

## Typ-2 und Typ-3 Grammatiken

# Kontextfreie Sprachen

Es gibt eine NL-vollständige kontextfreie Sprache  $L$ .

Wir beschreiben einen Kellerautomaten  $K$ , der  $L$  akzeptiert.

$K$  nimmt an,

- ▶ dass die Eingabe  $w$  ein Element von  $(a^*b^*)^*$  ist und
- ▶ interpretiert ein Teilwort  $a^r b^s$  als die Kante von Knoten  $r$  nach Knoten  $s$ .

$K$  rät einen Weg von Knoten 1 nach Knoten 2, indem  $K$

- eine erste Kante  $(1, x)$  in Eingabe  $w$  rät und  $x$  auf den Keller legt.
- Wenn Knoten  $y$  gegenwärtig zuoberst auf dem Keller liegt, dann rät  $K$  eine Kante  $(y', z)$ , die in  $w$  **nach** den bisher geratenen Kanten erscheint.
  - (a)  $K$  verifiziert mit Hilfe des Kellers, dass  $y = y'$  gilt und verwirft sonst.
  - (b)  $K$  legt  $z$  auf den Keller und akzeptiert, wenn  $z = 2$ .
  - (c)  $K$  wiederholt  $K$  sein Vorgehen solange  $z \neq 2$ .

Und wie zeigt man die LOGSPACE-Reduktion D-REACHABILITY  $\leq_{\text{LOG}} L$ ?

(a)  $NL \subseteq LOGCFL \subseteq DSPACE(\log^2 n)$ .

- ▶ Es gibt eine NL-vollständige kontextfreie Sprache  $\implies NL \subseteq LOGCFL$  folgt.
- ▶  $LOGCFL \subseteq DSPACE(\log^2 n)$  wird mit anderen Methoden gezeigt.

(b) Es gelte  $s(n) = o(\log_2 \log_2 n)$ . Dann folgt

$DSPACE(s)$  = Die Klasse der regulären Sprachen.

# Diagonalisierung

Eine Funktion

$$s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

heißt genau dann

**platz-konstruierbar**,

wenn

- $s(n) = \Omega(\log_2 n)$  und
- es eine deterministische I-O TM gibt, die für Eingabe  $0^n$  genau  $s(n)$  Zellen des Arbeitsbands markiert und  $\leq s(n)$  Speicherplatz benötigt.

Wir zeigen, dass man mit mehr zur Verfügung stehendem Speicher mehr Entscheidungsprobleme lösen kann.

Die zentrale Idee: **Diagonalisierung**.



Die Funktion  $s$  sei platz-konstruierbar  $\implies$

$DSPACE(o(s))$  ist eine echte Teilmenge von  $DSPACE(s)$ .

Wir konstruieren eine I-O TM  $M^*$  mit Hilfe der Diagonalisierungsmethode:

1.  $M^*$  bestimmt die Länge  $n$  der Eingabe  $w$ .
2.  $M^*$  steckt auf dem Arbeitsband  $2s(n)$  Zellen ab.  
/\* Dies ist mit Speicherplatz  $s(n)$  möglich, da  $s$  platz-konstruierbar ist. \*/
3. Wenn

$$w \neq \langle M \rangle 0^k$$

für eine I-O Turingmaschine  $M$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$  ist, dann verwirft  $M^*$ .

/\*  $\langle M \rangle$  bezeichnet die „Gödelnummer“ der Turingmaschine  $M$ . \*/

4.  $M^*$  simuliert  $M$  auf Eingabe  $w = \langle M \rangle 0^k$  und beginnt die Simulation mit dem Kopf in der Mitte des abgesteckten Bereichs.
  - ▶ Wenn  $M$  irgendwann den abgesteckten Bereich verlässt oder mehr als  $2^{s(n)}$  Schritte benötigt, dann verwirft  $M^*$ .
  - ▶ Ansonsten **akzeptiert**  $M^*$  die Eingabe  $w$  genau dann, wenn  $M$  **verwirft**./\* Kann  $M^*$  auf Platz  $\mathcal{O}(s(n))$  bis  $2^{s(n)} - 1$  zählen und eine  $s(n)$  platzbeschränkte Berechnung von  $M$  simulieren? \*/

- (a)  $M^*$  hält immer und kommt mit Speicherplatzbedarf  $\mathcal{O}(s(n))$  aus.  
 $\implies L(M^*) \in \text{DSPACE}(s)$ .
- (b) Und wenn  $L(M^*) = L(M)$  für eine I-O TM  $M$  mit Speicherplatz  $o(s)$ ?
- ▶ Für **genügend große Eingabelänge**  $n$  rechnet  $M$  stets in Zeit  $\leq 2^s \implies M^*$  kann  $M$  für Eingaben  $w = \langle M^* \rangle 0^k$  mit **genügend großem**  $k$  simulieren.
  - ▶ Schritt (4) garantiert, dass sich  $L(M)$  und  $L(M^*)$  unterscheiden:  
Speicherplatz  $r = o(s)$  ist unzureichend für die Berechnung von  $L(M^*)$ .  $\square$

# Der Satz von Savitch (1970)

# Der Satz von Savitch

- (a) **D-REACHABILITY**  $\in$  DSPACE( $\log_2^2 n$ ).
- (b) Die Funktion  $s$  sei platz-konstruierbar. Dann ist

$$\text{NSPACE}(s) \subseteq \text{DSPACE}(s^2)$$

und insbesondere folgt

$$\text{NL} \subseteq \text{DSPACE}(\log_2^2 n) \quad \text{und} \quad \text{PSPACE} = \text{NPSPACE}.$$

- Leider können wir **D-REACHABILITY** weder mit **Tiefensuche** noch mit **Breitensuche** lösen:
    - ▶ Sowohl der Stack der Tiefensuche wie auch die Queue der Breitensuche verlangen bis zu linearem Speicherplatz.
- Wir erfinden ein neues speicher-effizientes Traversierungsverfahren.
- Teil (b) stellt sich als direkte Konsequenz von Teil (a) heraus:  
**D-REACHABILITY** nimmt eine Schlüsselrolle ein.

Der **Algorithmus von Savitch** überprüft, ob der Eingabegraph  $G$  einen Weg von **Knoten  $u$**  nach **Knoten  $v$**  der **genauen Länge  $m$**  besitzt.

Der Graph  $G$  habe  $n$  Knoten.

- 1 Anfänglich ist  $u = 1, v = 2$  und  $m = n - 1$ .
- 2 Für **jedes  $m \leq n - 1$**  rufe den Algorithmus von Savitch mit den Parametern „Knoten 1“, „Knoten 2“ und „Länge  $m$ “ auf.
- 3 Akzeptiere genau dann, wenn der Algorithmus von Savitch mindestens einmal akzeptiert.

## Der Algorithmus von Savitch.

- 1 Die Eingaben seien der Graph  $G$  sowie die Knoten  $u$  und  $v$  und die Weglänge  $m$ .
- 2 Wenn  $m = 1$ , dann akzeptiere, falls  $(u, v)$  eine Kante von  $G$  ist und verwerfe ansonsten.
- 3 Für **alle** Knoten  $w$  führe zwei **rekursive** Aufrufe mit den jeweiligen Parametern  $u, w$  und  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  beziehungsweise  $w, v$  und  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  durch.
  - ▶ Akzeptiere, wenn es einen Knoten  $w$  mit zwei akzeptierenden Aufrufen gibt und verwerfe ansonsten.

## Analyse von Speicherplatz und Laufzeit:

- Speicherplatzverbrauch:
  - ▶ Ein Stack der maximalen Höhe  $\lceil \log_2 n \rceil$  genügt.
  - ▶ Jedes Element des Stacks entspricht zwei Knoten und einer Zahl  $m \leq n$ :  
**Logarithmischer Speicher** reicht für Stackelemente.
  - ▶ Insgesamt benötigen wir Speicherplatz  $\mathcal{O}(\log_2^2 n)$ .
- Die Laufzeit ist höchstens exponentiell im Speicherplatz und deshalb durch  $2^{\mathcal{O}(\log_2^2 n)}$  beschränkt. Furchtbar, aber was soll's?

Warum gilt  $\text{NSPACE}(s) \subseteq \text{DSPACE}(s^2)$ , wenn  $s$  platzkonstuiierbar ist?

# $\text{NSPACE}(s) \subseteq \text{DSPACE}(s^2)$

Es sei  $s(n) \geq \log_2 n$  und  $s$  sei platz-konstruierbar.

- $M$  sei eine beliebige **nichtdeterministische** Turingmaschine mit Speicherplatzbedarf  $s$  und  $w$  sei eine Eingabe.
- Wir konstruieren eine **deterministische** Turingmaschine  $M^*$ , die  $M$  auf Speicherplatz  $\mathcal{O}(s^2)$  simuliert.
  - ▶ Da  $s$  platz-konstruierbar ist, kann  $M^*$  einen Speicherplatz von  $s(n)$  Zellen abstecken und damit alle Konfigurationen von  $M$  systematisch erzeugen.
  - ▶  $M^*$  ruft den Algorithmus von Savitch auf und zwar
    - für den Berechnungsgraphen  $G_M(w)$  mit Knoten 1,2 entsprechend gewählt.
  - ▶  $M^*$  akzeptiert  $:\iff$  es gibt einen Weg von Knoten 1 nach Knoten 2.

$M^*$  hat den Speicherplatzbedarf  $\mathcal{O}(s^2)$  :

Speicherplatz  $\mathcal{O}(\log_2^2 K)$  ist ausreichend, um D-REACHABILITY für den Graphen der  $K = 2^{\mathcal{O}(s(n))}$  Konfigurationen zu lösen.



# Der Satz von Immerman und Szelepcsényi (1988)

**Nichtdeterministischer Speicherplatz ist abgeschlossen unter Komplementbildung.**

- (a) D-UNREACHABILITY, das Komplement von D-REACHABILITY, liegt ebenfalls in NL.
- (b) Die Funktion  $s$  sei platz-konstruierbar. Dann ist

$$\text{NSPACE}(s) = \text{coNSPACE}(s),$$

wobei

$$\text{coNSPACE}(s) = \{\bar{L} \mid L \in \text{NSPACE}(s)\}$$

genau aus den Komplementen der Sprachen in  $\text{NSPACE}(s)$  besteht.

Teil (b) wird sich als direkte Konsequenz von Teil (a) herausstellen.

Der Graph  $G$  sei die Eingabe für D-UNREACHABILITY.

- 1 Angenommen, wir können das **Anzahlproblem** in NL lösen, also die Anzahl  $m$  der von Knoten 1 aus erreichbaren Knoten bestimmen.

Wir konstruieren eine nichtdeterministische Maschine  $M$ , die D-UNREACHABILITY mit logarithmischem Speicher akzeptiert.

- 2 Im zweiten Schritt lösen wir das **Anzahlproblem** in NL.

- $m$  Knoten seien vom Knoten 1 aus erreichbar.
- Die Idee und ihre Implementierung.
  - ▶  $M$  rät **nacheinander** von 1 aus erreichbare Knoten  $v_1 < v_2 < \dots < v_m$ . Wie?
    - ★ Für  $v_j$  rät  $M$  einen Weg  $1 \xrightarrow{*} v_j$ .
    - ★ Wenn dies erfolgreich war, rät  $M$  danach  $v_{j+1}$  mit  $v_j < v_{j+1}$  und wiederholt ihr Vorgehen für  $v_{j+1}$ .
  - ▶ Wenn Knoten 2 von  $v_1, \dots, v_m$  verschieden ist, dann ist Knoten 2 **nicht** von Knoten 1 aus erreichbar und  $M$  akzeptiert.

Wir müssen das **Anzahlproblem** für den Graphen  $G$  lösen.

- Knoten 1 erreiche  $m_i$  Knoten durch Wege der Länge höchstens  $i$ .
  - ▶ Offensichtlich ist  $m_0 = 1$  und  $m_{n-1} = ?$  ist zu bestimmen.
- Zeige, dass  $m_{i+1}$  in NL berechnet werden kann, wenn  $m_i$  bekannt ist.
  - ▶ Setze zu Anfang  $m_{i+1} = 1$ , denn Knoten 1 erreicht sich selbst.
  - ▶ Verarbeite die Knoten  $k$  in **aufsteigender** Reihenfolge.
    - ★ Rate sukzessive Knoten  $v_{i,1} < \dots < v_{i,m_j}$  und verifiziere jedesmal, dass jeder geratene Knoten vom Knoten 1 durch einen Weg der Länge höchstens  $i$  erreichbar ist. Scheitert die Verifikation für irgendein  $v_{i,r}$ , dann verwerfe.
    - ★ Wenn  $(v_{i,r}, k)$  **eine** Kante ist, setze  $m_{i+1} := m_{i+1} + 1$  und  $k := k + 1$ .
    - ★ Wenn  $(v_{i,r}, k)$  **keine** Kante ist, dann rate  $v_{i,r+1}$  und fahre fort.

- Die Sprache  $L$  werde von einer nichtdeterministischen Turingmaschine  $M$  mit Speicherplatzbedarf  $s$  erkannt.

Es gelte  $s \geq \log_2 n$  und  $s$  sei platzkonstruierbar.

- Wir bauen eine nichtdeterministische TM  $M^*$ , die das Komplement  $\bar{L}$  mit Speicherplatzbedarf  $\mathcal{O}(s)$  erkennt.

- $M^*$  muss überprüfen, ob  $M$  für eine Eingabe  $w$  einen Weg von der Startkonfiguration 1 zur akzeptierenden Haltekonfiguration 2 besitzt.
- $M^*$  akzeptiert genau dann, wenn es keine akzeptierende Berechnung gibt, wenn also  $G_M(w)$  zu D-UNREACHABILITY gehört.
  - ▶  $M^*$  wendet den Algorithmus von Immerman und Szelepcsényi für den Berechnungsgraphen  $G_M(w)$  an.
  - ▶  $M^*$  muss klären, welche Kanten in  $G_M(w)$  einzusetzen sind: Platz  $\mathcal{O}(s)$  reicht, da die Konfigurationen von  $M$  nur Platz  $\mathcal{O}(s)$  benötigen.
- Also genügt insgesamt Platz  $\mathcal{O}(s)$ .

# PSPACE-Vollständigkeit

# $P \stackrel{?}{=} PSPACE$ : PSPACE-Vollständigkeit

Wir möchten die schwierigsten Sprachen in PSPACE (in Bezug auf die polynomielle Reduktion) bestimmen:

- (a) Eine Sprache  $L$  heißt **PSPACE-hart**, falls  $K \leq_P L$  für alle Sprachen  $K \in PSPACE$  gilt.
- (b)  $L$  heißt **PSPACE-vollständig**, falls  $L$  PSPACE-hart ist und falls  $L \in PSPACE$ .

## Die wesentlichen Eigenschaften der polynomiellen Reduktion:

- Wenn  $L \leq_P K$  und wenn  $K \in P$ , dann ist auch  $L \in P$ .
  - ▶ Als Konsequenz:  $P = PSPACE$ , wenn irgendeine PSPACE-vollständige Sprache in  $P$  liegt.  
Die Sprache  $L$  sei PSPACE-vollständig. Dann sind äquivalent

$$L \in P \iff P = PSPACE.$$

- Wenn  $M \leq_P K$  und  $K \leq_P L$ , dann ist  $M \leq_P L$ .
  - ▶ Als Konsequenz: **Wie zeigt man neue PSPACE-vollständige Sprachen?**  
Wenn  $K$  PSPACE-hart ist und wenn  $K \leq_P L$ , dann ist auch  $L$  PSPACE-hart.

# QBF: Quantifizierte Boolesche Formeln



# Quantifizierte Boolesche Formeln

Eine **quantifizierte Boolesche Formel**  $\phi$  besteht aus einem

- **Quantorenteil** mit Existenz- und Allquantoren
- gefolgt von einer **aussagenlogischen Formel**  $\alpha$ . Jede in  $\alpha$  vorkommende Variable wird von genau einem Quantor gebunden.

$$\text{QBF} = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine wahre quantifizierte Boolesche Formel} \}.$$

- Die Formel  $\phi \equiv \exists p \forall q ((p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q))$  ist falsch, denn
  - ▶ sie drückt die Äquivalenz von  $p$  und  $q$  aus, aber es gibt keinen Wahrheitswert für  $p$ , der mit 0 und 1 äquivalent ist.
  - ▶ Also ist  $\phi \notin \text{QBF}$ .
- Die Formel  $\psi \equiv \forall p \exists q ((p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q))$  ist hingegen wahr,
  - ▶ denn zu jedem Wahrheitswert für  $p$  gibt es einen äquivalenten Wahrheitswert für  $q$ .
  - ▶ Also ist  $\psi \in \text{QBF}$ .

**QBF  $\in$  DSPACE( $n$ )**

- Interpretiere QBF als ein Spiel des **Existenzquantors**  $\exists$  gegen den **Allquantor**  $\forall$ .
- Bei  $n$  Variablen ist das Spiel nach höchstens  $n$  Zügen vorbei  $\implies$  Der „Spielbaum“ hat Tiefe höchstens  $n$ .
- Werte den Spielbaum in DSPACE( $n$ ) aus.

**QBF ist PSPACE-hart:**

- Die Sprache  $L = L(M) \in$  PSPACE werde von einer deterministischen Turingmaschine  $M$  mit Speicherplatzbedarf  $\mathcal{O}(n^k)$  berechnet.
- Zeige

$$L \leq_P \text{QBF} :$$

- ▶ Baue für jede Eingabe  $w$  von  $L$  in polynomieller Zeit eine quantifizierte Boolesche Formel  $\phi_w$  mit

$$w \in L \iff \phi_w \text{ ist wahr.}$$

Wir müssen eine Formel  $\phi_w$  bauen mit

$$w \in L \iff \phi_w \text{ ist wahr.}$$

- Wir wissen: Es ist  $L = L(M)$  für eine deterministische TM  $M$  mit Speicherplatzbedarf  $s = \mathcal{O}(n^k)$ .
- Wie im NP-Vollständigkeitsbeweis von KNF-SAT führen wir aussagenlogische Variablen ein wie
  - $Kopf^t(z)$  für die Kopfposition.  $Kopf^t(z)$  soll genau dann wahr ist, wenn der Kopf zum Zeitpunkt  $t$  auf Zelle  $z$  steht,
  - $Zelle^t(z, a)$  für den Zelleninhalt.  $Zelle^t(z, a)$  soll genau dann wahr ist, wenn die Zelle  $z$  zum Zeitpunkt  $t$  mit dem Buchstaben  $a$  beschriftet ist und
  - $Zustand^t(q)$  für den aktuellen Zustand.  $Zustand^t(q)$  soll genau dann wahr ist, wenn  $q$  der Zustand zum Zeitpunkt ist.
- Aber  $M$  kann bis zu  $2^{\mathcal{O}(n^k)}$  Schritte ausführen!!!

(a) Für Konfigurationen  $c$  und  $d$  schreiben wir

$$c \xrightarrow{t} d,$$

wenn  $M$  nach höchstens  $t$  Schritten, von Konfiguration  $c$  aus startend, Konfiguration  $d$  erreicht.

(b) Baue eine höchstens polynomiell (polynomiell in „was“?)

lange Formel  $\psi_t(c, d)$ , die genau dann wahr ist, wenn  $c \xrightarrow{t} d$  gilt.

- Zur Erinnerung:  $M$  benötigt höchstens Speicher  $s$ .
- $c_0$  sei die Anfangskonfiguration und  $c_a$  sei die eindeutig bestimmte akzeptierende Haltekonfiguration von  $M$ . Dann gilt

$$w \in L \iff \psi_{2^s}(c_0, c_a).$$

- Setze

$$\phi_w := \psi_{2^s}(c_0, c_a).$$

## Und jetzt der Clou:

$$\psi_{2^{t+1}}(c, d) \equiv \exists e \forall f \forall g ( ((f = c \wedge g = e) \vee (f = e \wedge g = d)) \rightarrow \psi_{2^t}(f, g) ).$$

- $\exists e$  entspricht der **Folge** der Existenz-Quantoren zu den Variablen
  - ▶ Kopfposition, Zelleninhalt und Zustand der Konfiguration  $e$ .
 Ähnliches gilt für  $\forall f$  und  $\forall g$ .
- $\psi_{2^{t+1}}(c, d)$ : Eine Berechnung der Länge höchstens  $2^{t+1}$  kann in zwei Berechnungen der Länge höchstens  $2^t$  aufgespalten werden.
  - ▶ Der All-Quantor erlaubt eine **simultane** Überprüfung der beiden Berechnungen von  $c$  nach  $e$  und von  $e$  nach  $d$ .
- Dementsprechend wächst die Formellänge additiv um höchstens  $\mathcal{O}(n^k)$ , also höchstens um den Speicherplatzbedarf von  $M$ .

$\mathcal{O}(n^{2k})$  ist eine obere Schranke für die Länge der Formel  $\phi_w = \psi_{2^s}(c_0, c_a)$ .

# Das GEOGRAPHIE-Spiel

Im Kinderspiel „**Geographie**“, müssen zwei Spieler abwechselnd noch nicht genannte Städtenamen wählen, wobei jede Stadt mit dem Endbuchstaben der zuvor genannten Stadt beginnen muß.

- Die **Eingabe**: Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  und ein ausgezeichneter Knoten  $s \in V$ .
- Die **Spielregeln**:
  - ▶ Zwei Spieler Alice und Bob wählen abwechselnd eine noch nicht benutzte Kante aus  $E$ .
    - ★ Alice beginnt und wählt eine Kante mit Startknoten  $s$ .
    - ★ Jede anschließend gewählte Kante muß im Endknoten der zuvor gewählten Kante beginnen.
  - ▶ Der Spieler, der als erster keine solche unbenutzte Kante mehr findet, verliert das Spiel.

**Geographie ist PSPACE-vollständig.**

# PSPACE und die Komplexität von 2-Personen Spielen

- Wir haben schon beobachtet, dass sich QBF als ein Spiel zwischen dem Existenzquantor und dem Allquantor auffassen lässt.
- Wenn Spiele auf **beliebige Spielgröße** verallgemeinert werden, wie etwa auf  $n \times n$  Bretter, sind viele weitere Vollständigkeits-Ergebnisse bekannt [www.ics.uci.edu/~eppstein/cgt/hard.html](http://www.ics.uci.edu/~eppstein/cgt/hard.html):
  - ▶ Dame, Go, Othello, Schach, Sokoban sind Beispiele PSPACE-harter Spiele.
- PSPACE-Härte ist ein Gütesiegel, dass es sich um ein interessantes, weil sehr schwieriges Spiel handelt.

Leider kann die Komplexitätstheorie keine Aussagen über Spiele machen, deren Spielgröße fest ist – wie etwa eine fixierte Brettgröße.

# Das Universalitätsproblem für reguläre Ausdrücke und NFAs



- Sei  $R$  ein regulärer Ausdruck. Entscheide, ob  $L(R) \neq \Sigma^*$  gilt.
- Im Nicht-Universalitätsproblem für NFAs ist zu entscheiden, ob  $L(N) \neq \Sigma^*$  für einen NFA  $N$  gilt.

Ist ein regulärer Ausdruck oder ein NFA trivial?

- Diese Frage sollte einfach sein, schließlich wird für NFA doch nur gefragt, ob ein einziger Zustand ausreicht!

Die Nicht-Universalität für reguläre Ausdrücke ist ebenso PSPACE-hart wie die Nicht-Universalität für NFA.

- Sei  $M$  eine in-place TM, die das QBF-Problem löst.
  - ▶ Das **Wortproblem für  $M$**  ist äquivalent mit QBF und deshalb PSPACE-vollständig.
- **Unser Ziel:** Konstruiere in polynomieller Zeit einen regulären Ausdruck  $R_w$  für  $w$ , so dass

*$R_w$  alle Worte akzeptiert, die **nicht** mit der Konfigurationenfolge einer akzeptierenden Berechnung von  $M$  für  $w$  übereinstimmen.*

Damit ist die Behauptung gezeigt, denn

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\iff \text{es gibt eine akzeptierende Berechnung} \\ &\quad \text{von } M \text{ auf Eingabe } w \\ &\iff L(R_w) \neq \Sigma^*. \end{aligned}$$

Um Konfigurationen zu kodieren, benutzen wir die Symbole

- #, um Konfigurationen voneinander zu trennen,
- $[q, a] \in Q \times \Sigma$ , um anzugeben, dass  $a$  im Zustand  $q$  gelesen wird.

Akzeptiere eine Konfigurationenfolge, wenn

- 1 die Anfangskonfiguration nicht von der Form

$$\#[q_0, w_1]w_2 \cdots w_n\#$$

ist **oder**

- 2 keine Konfiguration der Konfigurationenfolge den Buchstaben  $[q_f, \gamma]$  für irgendein  $\gamma \in \Gamma$  und irgendeinen akzeptieren Zustand  $q_f$  enthält **oder**
- 3 die Folge nicht mit dem Trennsymbol # endet **oder**
- 4 wenn sich Bandinhalt oder Zustand für aufeinanderfolgende Konfigurationen auf nicht-legale Weise ändert.

Konstruiere  $R_w$  als Vereinigung von vier regulären Ausdrücken der Länge  $\mathcal{O}(|w|)$ , einen Ausdruck für jeden der vier Fälle.

Z.B. im vierten Fall, wenn sich Bandinhalt oder Zustand für aufeinanderfolgende Konfigurationen auf nicht-legale Weise ändert:

- $M$  arbeitet in-place, die Länge des Bandes stimmt also mit  $|w|$  überein.
- In einer **legalen** Folge  $y$  von Konfigurationen ist  $y_{i+n+1}$  eine Funktion von  $y_{i-1}y_iy_{i+1}$ .
- Insbesondere ist  $x$  genau dann **keine legale** Konfigurationenfolge, wenn es eine Position  $i$  gibt mit
  - ▶  $x_{i+n+1} \neq x_i$ , obwohl der Kopf nicht auf Position  $i$  gestanden hat oder
  - ▶  $x_{i+n+1}$  falsch aktualisiert wird.

- (a) Das **Äquivalenzproblem** für reguläre Ausdrücke ist PSPACE-hart:
  - ▶ Schon die Frage, ob ein regulärer Ausdruck  $R$  und  $\Sigma^*$  äquivalent sind, ist PSPACE-hart.
- (b) Das **Universalitätsproblem** für NFAs ist ebenfalls PSPACE-hart (warum?) und deshalb ist auch das Äquivalenzproblem für NFAs PSPACE-hart.
  - ▶ Das Universalitätsproblem wie auch das Äquivalenzproblem für NFAs ist viel, viel komplizierter als für DFAs.

# Probabilistische Berechnungen

Eine probabilistische Turingmaschine kann in jedem Schritt einen von bis zu zwei alternativen Anweisungen auswählen.

▶ Bei 2 Alternativen ist die Wahrscheinlichkeit jeder Alternative genau  $\frac{1}{2}$ .

- Eine probabilistische Turingmaschine  $M$  führt viele Berechnungen  $B$  aus.
- Wenn die Berechnung  $B$  die Wahrscheinlichkeit  $p_B$  besitzt, dann akzeptiert  $M$  mit Wahrscheinlichkeit

$$p = \sum_{B \text{ ist eine akzeptierende Berechnung}} p_B.$$

- $p$  hat **beschränkten Fehler**, wenn  $|p - \frac{1}{2}| > \varepsilon$  für eine Konstante  $\varepsilon > 0$ .
  - ▶ Berechnungen mit beschränktem Fehler sind vernünftig.
  - ▶ Berechnungen mit unbeschränktem Fehler hingegen sind sehr mächtig und können nichtdeterministische Berechnungen ohne Zeitverlust simulieren.

# Probabilistische Zeit versus deterministischen Platz

Sei  $M$  eine probabilistische Turingmaschine (mit nicht notwendigerweise beschränktem Fehler). Wenn die **worst-case Laufzeit** von Berechnungen für Eingaben der Länge  $n$  durch  $t(n)$  beschränkt ist, dann gilt

$$L(M) \in \text{DSPACE}(t).$$

- Die höchstens  $2^{\mathcal{O}(t(n))}$  Berechnungen für eine vorgegebene Eingabe  $x$  werden nacheinander simuliert.
- Ein Zähler summiert die Wahrscheinlichkeiten akzeptierender Berechnungen (auf  $\mathcal{O}(t(n))$  Zellen).
- Nachdem alle Berechnungen simuliert sind, wird geprüft, ob der Zähler einen Wert größer  $\frac{1}{2}$  hat, und in diesem Fall wird akzeptiert.



# Quantenberechnungen

# Wahrscheinlichkeitsamplitude

Die Matrix  $A_Q$  der Übergänge zwischen Konfigurationen ist **unitär**.

- $A_Q[C, C']$  ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude des 1-Schritt Übergangs von  $C$  nach  $C'$ .
- Eine Matrix  $A$  ist unitär, falls gilt  $\bar{A} \cdot A = \text{Einheitsmatrix}$ . ( $\bar{A}$  ist die konjugiert transponierte Matrix von  $A$ .)

- Weise einer Quantenberechnung  $B$  das Produkt  $p_B \in \mathbb{C}$  der **Wahrscheinlichkeitsamplituden** der einzelnen Schritte zu.
- Die **Wahrscheinlichkeitsamplitude einer Konfiguration  $C$**  ist

$$\tau_C = \sum_{B \text{ führt auf } C} p_B.$$

Die **Wahrscheinlichkeit von  $C$**  ist die quadrierte Länge von  $\tau_C$ , also

$$|\tau_C|^2.$$

Die von einem Quantenrechner  $Q$  akzeptierte Sprache ist

$$L(Q) = \left\{ x : \sum_{C \text{ ist akzeptierende Konfiguration von } Q \text{ auf Eingabe } x} |\tau_C|^2 > \frac{1}{2}, \right\}.$$

- Wenn  $Q$  in Zeit  $t$  rechnet, bestimme die Einträge in der ersten Zeile von

$$A_Q^t$$

und summiere die Wahrscheinlichkeiten akzeptierender Konfigurationen.

- ▶ In der ersten Zeile von  $A_Q$  sind alle Wahrscheinlichkeitsamplituden der 1-Schritt Übergänge aus der Startkonfiguration aufgeführt.
  - ▶ Für  $k \leq t$ : Die erste Zeile von  $A_Q^k$  listet die Wahrscheinlichkeitsamplituden der  **$k$ -Schritt Nachfolger der Startkonfiguration** auf.
- Wie berechnet man die erste Zeile von  $A_Q^k$  platz-effizient?  $A_Q$  ist doch eine  $2^{\mathcal{O}(t)} \times 2^{\mathcal{O}(t)}$  Matrix! Platz  $\mathcal{O}(k \cdot t)$  ist ausreichend!

Wenn ein Quantenrechner  $Q$  die Sprache  $L(Q)$  in Zeit  $t(n)$  akzeptiert, dann ist

$$L(Q) \in \text{DSPACE}(t^2).$$

Hierzu ist die Forderung eines beschränkten Fehlers ebenso nicht notwendig wie die Forderung, dass die Konfigurationsmatrix  $A_Q$  unitär ist.

*Probabilistische Berechnungen oder Quantenberechnungen in **polynomieller Zeit** akzeptieren selbst bei unbeschränktem Fehler „nur“ Sprachen in **PSPACE**.*

- In  $DSPACE(o(\log_2 \log_2 n))$  berechenbare Sprachen stimmen mit den regulären Sprachen überein.
- Die erste nicht-triviale Klasse ist die Klasse DL aller auf logarithmischem Platz berechenbaren Sprachen.
  - ▶ **U-REACHABILITY** gehört zu DL.
  - ▶ **D-REACHABILITY** ist NL-vollständig, also ein für DL schwierigstes Problem in NL.
    - ★ Insbesondere folgt, dass NL in P enthalten ist.
    - ★ Weitere NL-vollständige Probleme sind 2-SAT, das Leerheitsproblem für DFAs und das Problem, NFAs zu simulieren.
- Der Satz von Savitch zeigt  $D-REACHABILITY \in DL$  und allgemein  $NSPACE(s) \subseteq DSPACE(s^2)$  für platz-konstruierbare Funktionen  $s$ .
- Das Komplementverhalten ist „nicht typisch für Nichtdeterminismus“, denn es ist überraschenderweise  $NSPACE(s) = coNSPACE(s)$ , falls  $s$  platz-konstruierbar ist.

- **PSPACE** lässt sich als die Komplexitätsklasse nicht-trivialer **Zwei-Personen Spiele** (wie QBF oder Geographie) auffassen.
- Entscheidungsprobleme für reguläre Ausdrücke oder NFA, wie die **Universalität, das Äquivalenzproblem** oder **die Minimierung**, haben sich als unanständig schwierig, nämlich als PSPACE-hart herausgestellt.
- Die Klasse PSPACE ist mächtig und enthält alle Entscheidungsprobleme, die durch **randomisierte Algorithmen** oder **Quanten-Algorithmen** in polynomieller Zeit lösbar sind.
- Wir haben die **Chomsky-Hierarchie** betrachtet.
  - ▶ Die von Typ-0 Grammatiken erzeugbaren Sprachen stimmen mit den **rekursiv aufzählbaren** Sprachen überein.
  - ▶ Die **kontextsensitiven** Sprachen sind noch zu komplex, da ihr Wortproblem PSPACE-vollständig sein kann.
  - ▶ **Kontextfreie** Sprachen können NL-hart sein, ihr Wortproblem ist aber in  $DSPACE(\log_2^2 n)$  lösbar.
  - ▶ Die Klasse der **regulären** Sprachen stimmt überein mit  $DSPACE(s)$ , falls  $s = o(\log_2 \log_2 n)$ .