Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2018

Elizaveta Kovalevskaya
Georg Schnitger
Philipp Tertel

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 2

Ausgabe: 23.04.18
Abgabe: 02.05.18 um 12 Uhr

Aufgabe 2.1 *Es gibt genau einen minimalen DFA* (3+3+3 Punkte)

Seien $A = (\Sigma, Q_A, \delta_A, q_0^A, F_A)$ und $B = (\Sigma, Q_B, \delta_B, q_0^B, F_B)$ zwei äquivalente minimale DFAs. Wir möchten eine bijektive Funktion $f : Q_A \to Q_B$ konstruieren, so dass sich A und B – nach einer Umbenennung der Zustände durch f – als gleich herausstellen.

Wie soll f aussehen? Für jedes Wort $x \in \Sigma^*$ definieren wir

$$f(\delta_A(q_0^A, x)) := \delta_B(q_0^B, x)\,.$$

a) Kann es passieren, dass zwei Worte $x, y \in \Sigma^*$ in A zu demselben Zustand, aber in B zu verschiedenen Zuständen führen? In diesem Fall wäre f nicht wohldefiniert. Zeigen Sie deshalb für alle Worte $x, y \in \Sigma^*$:

   Wenn $\delta_A(q_0^A, x) = \delta_A(q_0^A, y)$, dann auch $\delta_B(q_0^B, x) = \delta_B(q_0^B, y)$.

   Hinweis: Ein minimaler DFA C stimmt mit seinem Äquivalenzklassenautomaten überein, d. h. alle Klassen der Verschmelzungsrelation $\equiv_C$ sind einelementig. Weiterhin, da A und B äquivalent sind, folgt

   $$\delta_A(q_0^A, x) \in F_A \iff \delta_B(q_0^B, x) \in F_B$$

   für alle Worte $x \in \Sigma^*$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f bijektiv ist.

c) Zeigen Sie: Für alle Zustände $p \in Q_A$ und alle Buchstaben $a \in \Sigma$ gilt

   $$f(\delta_A(p, a)) = \delta_B(f(p), a)\,.$$

Aufgabe 2.2 *Vorspiegelung falscher Tatsachen* (2+3 Punkte)

a) Sei A ein DFA mit n Zuständen. Zeigen Sie: Wenn $L(A) \neq \Sigma^*$, dann verwirft A ein Wort der Länge höchstens $n - 1$.

b) Konstruieren Sie einen NFA N mit $\mathcal{O}(n^2 \cdot \ln(n))$ Zuständen über dem Alphabet $\Sigma = \{1\}$, so dass $L(N) \neq \Sigma^*$ gilt. Allerdings muss der kürzeste von N verworfene String mindestens die Länge 2^n besitzen.

   Hinweis: Die k Zahlen $n_1, \ldots, n_k$ seien paarweise teilerfremd. Dann ist $n_1 \cdots n_k$ die kleinste von Null verschiedene Zahl, die von allen k Zahlen geteilt wird.

   Des Weiteren, wenn $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen höchstens n ist, dann besagt der Primzahlsatz, dass gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln(n)} = 1.$$

Aufgabe 2.3 ***Fooling Sets oder die Größe von NFAs*** (4+2+1+3 Punkte)

Der Index(L) stimmt mit der minimalen Zustandszahl eines DFAs für die Sprache L überein. Kennen wir irgendeinen DFA A für L, dann können wir den Index als die Zustandszahl des Äquivalenzklassenautomaten A' effizient berechnen. Möchten wir hingegen die minimale Zustandszahl eines NFAs für L berechnen, dann ist die Berechnung – wie wir später sehen werden – ein extrem schwieriges Problem. Wir besprechen hier die Methode der Fooling Sets, die für einige Sprachen L die minimale Zustandszahl eines minimalen NFAs für L (fast) exakt angibt. Diese Methode wird in der folgenden Definition formalisiert.

Definition: Sei Σ ein endliches Alphabet und L eine (nicht notwendigerweise reguläre) Sprache über Σ. Für Worte $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \in \Sigma^*$ nennen wir die Menge $\{\, (u_i, v_i) \,:\, i \in \{\, 1, \ldots, k \,\}\}$ ein ***Fooling Set*** der Größe k für L falls

- für alle $i \in \{\, 1, \ldots, k \,\}$ gilt: $u_i v_i \in L$, und
- für alle $i, j \in \{\, 1, \ldots, k \,\}$ mit $i \neq j$ gilt: $u_i v_j \notin L$ oder $u_j v_i \notin L$.

Fooling(L) ist die maximale Größe eines Fooling Sets für L.

a) Sei L eine Sprache. Zeigen Sie: Jeder NFA, der L akzeptiert, muss mindestens Fooling(L) Zustände besitzen.

b) Sei $\mathrm{EQ}_k = \{xy \,:\, x, y \in \{0,1\}^k, x = y\}$. Zeigen Sie:

- $\mathrm{Fooling}(\mathrm{EQ}_k) \geq 2^k$.
- $\mathrm{Index}(\mathrm{EQ}_k) = \mathcal{O}(k \cdot 2^k)$.

c) Zeigen Sie: $\mathrm{Fooling}(L) \leq \mathrm{Index}(L)$ für alle Sprachen L.

d) $\mathrm{NEQ}_k = \{0,1\}^{2k} \setminus \mathrm{EQ}_k$ besteht aus allen binären Worten der Länge $2k$, für die sich der k-Bit-Präfix vom k-Bit-Suffix unterscheidet. Zeigen Sie:

- $\mathrm{Fooling}(\mathrm{NEQ}_k) = \mathcal{O}(k^2)$.
- $\mathrm{Index}(\mathrm{NEQ}_k) \geq 2^k$.