Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2018

Elizaveta Kovalevskaya
Georg Schnitger
Philipp Tertel

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 6

Ausgabe: 22.05.18
Abgabe: 29.05.18

Aufgabe 6.1 *ε-Variablen und nützliche Variablen* (4+4+4 Punkte)

Nur wenige Fragestellungen im Bereich der kontextfreien Grammatiken – wie etwa das Wortproblem für kontextfreie Sprachen – besitzen effiziente Lösungen. Hier besprechen wir einige der wichtigsten dieser effizient lösbaren Fragestellungen.

Sei $G = (\Sigma, V, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik und es gelte $V = \{X_0, X_1, \ldots, X_k\}$ mit $X_0 = S$.

a) Eine Variable $X \in V$ heißt eine *ε-Variable*, wenn $X \xrightarrow{*} \varepsilon$ gilt, d. h. wenn das leere Wort in möglicherweise mehreren Schritten aus X ableitbar ist. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der alle ε-Variablen von G ausgibt. Die Laufzeit sollte linear in $|G|$ sein, wobei

$$|G| := |V| + \sum_{X \to \alpha \in P} |\alpha|.$$

b) Eine Variable $X \in V$ heißt *produktiv*, wenn $X \xrightarrow{*} w$ für ein Wort $w \in \Sigma^+$ gilt, d. h. wenn ein nicht-leeres Wort w aus X in möglicherweise mehreren Schritten ableitbar ist. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der alle produktiven Variablen von G ausgibt. Die Laufzeit sollte linear in $|G|$ sein.

   Hinweis: Benutzen Sie Teil (a). Aber Achtung: Wenn Sie anfänglich ε-Variablen aus allen rechten Seiten einer Produktion entfernen, dann erkennen Sie unter Umständen einige produktive Variablen nicht.

c) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der überprüft ob $L(G)$ endlich ist. Die Laufzeit sollte linear in $|G|$ sein.

Aufgabe 6.2 *Entscheidungsprobleme für DCFLs* (4+2 Punkte)

Beachten Sie, dass DCFLs unter Komplementbildung abgeschlossen sind.

a) Ein DFA A und ein deterministischer Kellerautomat K seien gegeben. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der entscheidet, ob $L(A) \subseteq L(K)$ gilt.

b) Der deterministische Kellerautomat K über dem Alphabet Σ sei gegeben. Zeigen Sie, dass das Universalitätsproblem für $L(K)$, nämlich $L(K) \stackrel{?}{=} \Sigma^*$, entscheidbar ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.3 ***Eine Reduktion*** (6 Punkte)

Die Sprache *Universalität* besteht aus allen kontextfreien Grammatiken $G = (\Sigma, V, S, P)$, für die

$$L(G) = \Sigma^*$$

gilt. Sie können annehmen, dass das Universalitätsproblem, also die Sprache „Universalität" nicht entscheidbar ist.

Die Sprache *DK* besteht aus allen kontextfreien Grammatiken $G = (\Sigma, V, S, P)$, für die $L(G)$ eine deterministisch kontextfreie Sprache ist. Zeigen Sie die Reduktion

$$\text{Universalität} \leq \text{DK}.$$

Hinweis: Für eine beliebige kontextfreie Grammatik G ist – mit einem stets haltenden Programm – eine kontextfreie Grammatik G' zu konstruieren, so dass gilt

$$L(G) = \Sigma^* \iff L(G') \in \text{DCFL}. \tag{1}$$

Sei # ein Buchstabe, der nicht zu Σ gehört. Für eine geeignete Sprache L wählen Sie den Ansatz

$$L(G') = \Big(L(G) \cdot \# \cdot \Sigma^*\Big) \cup \Big(\Sigma^* \cdot \# \cdot L\Big).$$

Natürlich muss $L(G')$ eine kontextfreie Grammatik sein. Wie sollte man L wählen, sodass (1) gilt? Begründen Sie Ihre Konstruktion sorgfältig.

Kommentar: Das Problem zu entscheiden, ob eine gegebene kontextfreie Grammatik (oder ein PDA) eine deterministisch kontextfreie Sprache definiert, ist also unentscheidbar.