

Übungsblatt 6

Ausgabe: 22.05.18

Abgabe: 29.05.18

Aufgabe 6.1 ε -Variablen und nützliche Variablen

(4+4+4 Punkte)

Nur wenige Fragestellungen im Bereich der kontextfreien Grammatiken – wie etwa das Wortproblem für kontextfreie Sprachen – besitzen effiziente Lösungen. Hier besprechen wir einige der wichtigsten dieser effizient lösbaren Fragestellungen.

Sei $G = (\Sigma, V, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik und es gelte $V = \{X_0, X_1, \dots, X_k\}$ mit $X_0 = S$.

- a) Eine Variable $X \in V$ heißt eine ε -Variable, wenn $X \xrightarrow{*} \varepsilon$ gilt, d. h. wenn das leere Wort in möglicherweise mehreren Schritten aus X ableitbar ist. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der alle ε -Variablen von G ausgibt. Die Laufzeit sollte linear in $|G|$ sein, wobei

$$|G| := |V| + \sum_{X \rightarrow \alpha \in P} |\alpha|.$$

- b) Eine Variable $X \in V$ heißt *produktiv*, wenn $X \xrightarrow{*} w$ für ein Wort $w \in \Sigma^+$ gilt, d. h. wenn ein nicht-leeres Wort w aus X in möglicherweise mehreren Schritten ableitbar ist. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der alle produktiven Variablen von G ausgibt. Die Laufzeit sollte linear in $|G|$ sein.

Hinweis: Benutzen Sie Teil (a). Aber Achtung: Wenn Sie anfänglich ε -Variablen aus allen rechten Seiten einer Produktion entfernen, dann erkennen Sie unter Umständen einige produktive Variablen nicht.

- c) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der überprüft, ob $L(G)$ endlich ist. Die Laufzeit sollte linear in $|G|$ sein.

Aufgabe 6.2 Entscheidungsprobleme für DCFLs

(4+2 Punkte)

- a) Ein DFA A und ein deterministischer Kellerautomat K seien gegeben. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der entscheidet, ob $L(A) \subseteq L(K)$ gilt.
- b) Der deterministische Kellerautomat K über dem Alphabet Σ sei gegeben. Zeigen Sie, dass das Universalitätsproblem für $L(K)$, nämlich $L(K) \stackrel{?}{=} \Sigma^*$, entscheidbar ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass DCFLs unter Komplementbildung abgeschlossen sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.3 *Eine Reduktion*

(6 Punkte)

Die Sprache *Universalität* besteht aus allen kontextfreien Grammatiken $G = (\Sigma, V, S, P)$, für die

$$L(G) = \Sigma^*$$

gilt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Universalitätsproblem, also die Sprache „Universalität“, nicht entscheidbar ist.

Die Sprache *DK* besteht aus allen kontextfreien Grammatiken $G = (\Sigma, V, S, P)$, für die $L(G)$ eine deterministisch kontextfreie Sprache ist. Zeigen Sie die Reduktion

$$\text{Universalität} \leq \text{DK}.$$

Hinweis: Für eine beliebige kontextfreie Grammatik G ist – mit einem stets haltenden Programm – eine kontextfreie Grammatik G' zu konstruieren, so dass gilt

$$L(G) = \Sigma^* \iff L(G') \in \text{DCFL}. \quad (1)$$

Sei $\#$ ein Buchstabe, der nicht zu Σ gehört. Für eine geeignete Sprache L wählen Sie den Ansatz

$$L(G') = \left(L(G) \cdot \# \cdot \Sigma^* \right) \cup \left(\Sigma^* \cdot \# \cdot L \right).$$

Natürlich muss $L(G')$ eine kontextfreie Grammatik sein. Wie sollte man L wählen, sodass (1) gilt? Begründen Sie Ihre Konstruktion sorgfältig.

Kommentar: Das Problem, zu entscheiden, ob eine gegebene kontextfreie Grammatik (oder ein PDA) eine deterministisch kontextfreie Sprache definiert, ist also unentscheidbar.