Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2018

Elizaveta Kovalevskaya
Georg Schnitger
Philipp Tertel

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 9

Ausgabe: 12.06.18
Abgabe: 19.06.18

Sie können auf diesem Blatt bis zu 8 Bonuspunkte erwerben.

Aufgabe 9.1 *Die parallele Komplexität regulärer Sprachen* (4 Punkte)

Ein DFA $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ sei gegeben. Entwerfen Sie eine uniforme Schaltkreisfamilie $(S_n : n \in \mathbb{N})$, sodass S_n genau die Worte in $L(A) \cap \Sigma^n$ akzeptiert. Die Tiefe von S_n soll durch $\mathcal{O}(\log_2 n)$ beschränkt sein, die Größe soll höchstens $\mathcal{O}(n)$ betragen. (Es ist also $L(A) \in \mathbf{DEPTH\text{-}SIZE}_{\mathbf{uniform}}(\log_2 n, n)$ zu zeigen. Für eine Eingabe w von A ist Größe und Tiefe von S_n in Abhängigkeit von der Eingabelänge $n := |w|$ zu analysieren.)

Hinweis: Verwenden Sie einen Divide & Conquer-Ansatz. Für eine Eingabe $w \in \Sigma^n$ mit $w = uv$ ist die Bestimmung von $q = \delta(q_0, u)$ ein naheliegendes Teilproblem. Aber wie kann die Bestimmung von $\delta(q, v)$ gleichzeitig ablaufen, ohne dass der Zustand q bekannt ist?

Aufgabe 9.2 *Die parallele Komplexität kontextfreier Sprachen* (8 Punkte)

Im **Wortproblem für kontextfreie Grammatiken** sind eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort $w \in \Sigma^*$ gegeben. Es ist zu entscheiden, ob $w \in L(G)$ gilt.

Zeigen Sie: Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist **P**-hart.

Hinweis: Zeigen Sie die Reduktion M-CVP $\leq_{\text{LOG}}$ Wortproblem für kontextfreie Grammatiken. Dazu müssen Sie für einen monotonen Schaltkreis $\mathcal{S}$ und eine Eingabe $y \in \{0,1\}^n$ eine kontextfreie Grammatik $G_{\mathcal{S},y} = (\Sigma, V, S, P)$ (mit $\Sigma = \{0,1\}$) und ein Wort $w_{\mathcal{S},y}$ konstruieren, sodass

$$\mathcal{S}(y) = 1 \iff w_{\mathcal{S},y} \in L(G_{\mathcal{S},y}).$$

Setzen Sie $w_{\mathcal{S},y} = \varepsilon$ und wählen Sie für jedes Gatter g eine eigene Variable $v(g)$. Das Startsymbol ist die Variable $v(a)$ des Ausgabegatter a von $\mathcal{S}$.

Es ist zu zeigen, dass der monotone Schaltkreis $\mathcal{S}$ die Eingabe y genau dann akzeptiert, wenn $G_{\mathcal{S},y}$ das leere Wort erzeugt. Sei g ein Gatter mit den direkten Vorgängern g_1 und g_2. Welche Produktionen wählen Sie für ein ODER-Gatter g aus, welche Produktionen für ein UND-Gatter g?

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3 $\mathbf{NC}^1$ *und kleine Boolesche Formeln* (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Eine **Boolesche Formel** ist ein Schaltkreis S mit Eingrad höchstens zwei, in dem jedes Gatter (mit Ausnahme der Senke) den Ausgrad 1 besitzt: Mit anderen Worten, der Graph von S ist ein gerichteter Baum, dessen Kanten von den „Blättern an aufwärts“ gerichtet sind. Eingabevariablen dürfen mehrfach unter den Blättern des Baums vorkommen. Es ist ebenfalls erlaubt, dass Blätter die konstante Ausgabe 0 oder 1 geben.

Sei L eine Sprache.

a) Zeigen Sie: Jeder Baum mit n Knoten und maximalem Eingrad höchstens zwei besitzt einen Knoten v, sodass der Teilbaum mit Wurzel v mindestens $n/3$ und höchstens $2n/3$ Knoten besitzt.

b) Zeigen Sie: Wenn L eine Boolesche Formel der Größe $s(n)$ besitzt, dann besitzt L eine Boolesche Formel der Tiefe $\mathcal{O}(\log_2 s(n))$.

   Hinweis: Sei B der Baum der Formel der Größe $s(n)$. Schneide den nach Teil a) existierenden Teilbaum mit Wurzel v aus B heraus. Wir erhalten drei Formeln, nämlich die von v berechnete Formel $F(v)$, die vom Restbaum berechnete Formel F_0, wenn die Konstante 0 an den Knoten v geklemmt wird, bzw. die vom Restbaum berechnete Formel F_1.

c) Zeigen Sie: Eine Sprache L besitzt eine Familie $(F_n : n \in \mathbb{N})$ von Booleschen Formeln mit polynomiell vielen Knoten $\iff L \in \mathbf{NC}^1$.

   (Beachten Sie, dass wir *nicht* die Anforderung der Uniformität stellen.)

Aufgabe 9.4 *Unbeschränkter Fanin und Blitzgeschwindigkeit* (4 + 4 + 4 Punkte)

Manchmal gelingen Konstantzeit-Berechnungen mit vernünftig großen Schaltkreisen, manchmal sind selbst bei einfachen Problemen extrem viele Gatter notwendig.

a) Die Parität von n Bits, also die Summe $x_1 + \cdots + x_n \mod 2$ sei mit einer DNF zu bestimmen.

   Zeigen Sie: Mindestens 2^{n-1} Gatter werden benötigt.

b) Zeigen Sie, dass $2^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}$ Gatter genügen, um die Parität von n Bits in Tiefe drei zu bestimmen. (Die Tiefe eines Schaltkreises S ist die Länge eines längsten Weges in S, wobei Negationsgatter nicht mitgezählt werden.)

c) Konstruieren Sie einen Schaltkreis S_n konstanter Tiefe und polynomieller Größe (in n), der für je zwei Worte $x, y \in \{0,1\}^n$ die Binärdarstellung z der Summe $\text{Zahl}(x)+\text{Zahl}(y)$ berechnet.