

## Übungsblatt 1

Ausgabe: 28.04.2014

Abgabe: 05.05.2014 **vor** Vorlesungsbeginn

### Aufgabe 1.1. (3+3)

*Page-Rank und Linkfarms*

Der Page-Rank einer Seite  $v$  sei wie üblich durch  $pr(v) = \frac{d}{n} + (1-d) \sum_{(u,v)} \frac{pr(u)}{d_u}$  gegeben, wobei  $d$  den Dämpfungsfaktor und  $n$  die Anzahl der Seiten insgesamt bezeichne.

Ein Anbieter möchte seiner Website  $w$  zu einem höheren Page-Rank verhelfen.

- In einem ersten Versuch legt der Anbieter  $c$  neue Seiten an, die jeweils wechselseitig aufeinander und auf die ursprüngliche Seite  $w$  verweisen. Zeige, dass sich der Page-Rank seiner Seite  $w$  dadurch um höchstens  $(1-d-\frac{1}{n}) \cdot \frac{cd}{n+c}$  erhöht.
- In einem zweiten Versuch legt er  $c$  Seiten an, die alle ausschließlich auf die Seite  $w$  verweisen. Zeige, dass sich der Page-Rank seiner Seite  $w$  dadurch um höchstens  $(1-d-\frac{1}{n}) \cdot \frac{cd}{n+c}$  erhöht.

### Aufgabe 1.2. (3+3)

*Konvergenz bei symmetrischen Matrizen*

- a) Wir betrachten die symmetrische Matrix  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Zeige, dass die Folge  $(x_k | k \geq 0)$  mit  $x_{k+1} = \frac{K \cdot x_k}{\|K \cdot x_k\|}$  für alle Startvektoren  $x_0 = (a, b)^T$  mit  $b \neq 0$  nicht konvergiert.

- b) Sei nun  $K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ .

Für welche Startvektoren  $x_0$  konvergiert die Folge  $(x_k | k \geq 0)$  diesmal?

### Aufgabe 1.3. (2+6+2+2)

*Konvergenz des HITS-Algorithmus*

Sei nun  $K = MM^T$  oder  $K = M^T M$  und der größte Eigenwert von  $K$  größer als zweitgrößte. Zeige:

- Alle Eigenwerte von  $K$  sind nicht-negativ.
- Wenn  $K$  nur nicht-negative Einträge hat, dann sind auch alle Komponenten des Eigenvektors  $v_{\max}$  zum größten Eigenwert nicht-negativ.
- Das HITS-Verfahren konvergiert für jeden Startvektor mit nur positiven Komponenten gegen  $v_{\max}$ .
- Liegt Konvergenz auch dann vor, wenn die beiden größten Eigenwerte identisch sind? Begründen Sie Ihre Antwort.