Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungsblatt 2 (Version 3)

Ausgabe: 05.05.2014
Abgabe: **19.05.2014** vor Vorlesungsbeginn

Hinweis: Das Abgabedatum wurde um eine Woche nach hinten verschoben.

Hinweis: Die Punktzahlen der zweiten und dritten Aufgabe wurden leicht erhöht, die Gesamtpunktzahl des Blattes bleibt jedoch weiterhin 24. Darüber hinaus erworbene Punkte werden als Bonuspunkte angerechnet (maximal 6).

Aufgabe 2.1. (2+2+2) *Bordas Regel*

Gegeben seien n Wähler und eine endliche Menge U von Alternativen. Jeder Wähler i bestimmt seine Präferenz (oder Reihenfolge) $<_i$ auf U. Ein Präferenzen-Funktional P heißt

(i) *anonym*, falls die berechnete Präferenz nicht von der Reihenfolge der individuellen Präferenzen abhängt. (Es gilt also $P(<_1, \ldots, <_n) = P\left(<_{\pi(1)}, \ldots, <_{\pi(n)}\right)$ für jede Permutation π.)

(ii) *neutral*, falls für je zwei Alternativen x und y eine Vertauschung von x und y in jeder Reihenfolge zu einer Vertauschung in der berechneten Präferenz führt.

(iii) *monoton*, falls für jedes $x, y \in U$ mit $x < y$ die Beziehung $x < y$ weiterhin gilt, falls x und y in irgendeiner Reihenfolge $<_i$ vertauscht werden, so dass jetzt $x <_i y$ gilt.

a) Es gelte $|U| = 2$ und n sei ungerade. **Zeige**, dass das Demokratie-Funktional das einzige Präferenzen-Funktional ist, das anonym, neutral und monoton ist.

b) Es gelte $|U| \geq 3$. Ist Bordas Regel anonym? Ist Bordas Regel neutral? Ist Bordas Regel monoton? **Begründe** jeweils kurz deine Antwort.

Hinweis: Situationen, in denen es einen Gleichstand gibt, dürfen ignoriert werden.

c) **Zeige**, dass Bordas Regel die abgeschwächte Demokratie-Eigenschaft bereits für $|S| = 1$ verletzt.

Aufgabe 2.2. (4+6) *Kendall- und Spearman-Distanz*

Gegeben seien ein endliches Universum U und zwei vollständige Ordnungen $<_1$ und $<_2$.

Zeige, dass für die Kendall-Distanz $K(<_1, <_2)$ und die Spearman-Distanz $S(<_1, <_2)$ stets gilt:

a) $S(<_1, <_2) \leq 2 \cdot K(<_1, <_2)$

b) $K(<_1, <_2) \leq S(<_1, <_2)$

Aufgabe 2.3. (6+4+4) *Chord*

Gegeben sei ein Chord-Netzwerk bestehend aus n Rechnern, die $m \geq n$ Daten verwalten. Rechner und Daten werden durch eine konsistente Hashfunktion h unabhängig und gleichverteilt auf das Intervall $[0, 1]$ abgebildet und alle Informationen in den Routing-Tabellen (d.h. jeweils Vorgänger, Nachfolger und 2^{-k}-Nachbarn) seien korrekt.

Wir sagen, dass ein Ereignis „hochwahrscheinlich" ist, wenn es mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \mathcal{O}(1/n)$ eintritt.

a) **Zeige:** Es gibt eine Konstante α, sodass hochwahrscheinlich kein Rechner mehr als $\alpha \frac{m \log(n)}{n}$ Daten zu verwalten hat.

   Hinweis: Benutze die Chernoff-Ungleichung. (Satz 1.9 im Skript)

b) **Zeige:** Die Suche nach einer beliebigen Datei d ist hochwahrscheinlich nach $\mathcal{O}(\log n)$ Schritten erfolgreich.

c) Es werden nun n weitere Rechner hinzugefügt, dabei aber in allen Routing-Tabellen jeweils nur Vorgänger und Nachfolger aktualisiert.

   Zeige: Eine Suche gelingt hochwahrscheinlich immer noch in $\mathcal{O}(\log n)$ Schritten.

   Hinweis: Wie viele neue Rechner liegen hochwahrscheinlich höchstens zwischen zwei alten?