Komplexitätstheorie

Sommersemester 2013

Prof. Dr. Georg Schnitger,
Dipl. Inf. Bert Besser

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Blatt 5

Ausgabe: 29.05.2013
Abgabe: 05.06.2012

5.1. Aufgabe (8) *Nochmal XOR*

a) Konstruiere Schaltkreise für XOR_n mit Tiefe d und Größe $\mathrm{poly(n)} \cdot 2^{\mathrm{n}^{\mathrm{O}(1/(\mathrm{d}-1))}}$.

b) Konstruiere Schaltkreise für XOR_n mit Tiefe d und Größe $\mathrm{poly(n)} \cdot 2^{\mathrm{O}(\mathrm{n}^{1/(\mathrm{d}-1)})}$.

Zur Vorbereitung der beiden nächsten Aufgaben:

Satz (Vorlesung) *Ein Schaltkreis der Tiefe d für XOR_n hat mindestens $2^{\Omega(n^{1/(d-1)})}$ Gatter.*

Definition *Die Sprache L_1 ist genau dann AC_0*-reduzierbar *auf die Sprache L_2 (Notation: $L_1 \leq_{AC_0} L_2$), wenn es für L_1 einen Schaltkreis gibt, der konstante Tiefe und polynomielle Größe hat und der neben Negationsgattern nur die folgenden Gattertypen von jeweils unbeschränktem Fanin verwendet: $\wedge$-Gatter, $\vee$-Gatter und Gatter, die L_2 entscheiden.*

Satz *Wenn $XOR_n \leq_{AC_0} L$ gilt, dann gibt es keinen AC_0-Schaltkreis für L.*

5.2. Aufgabe (8) *MAJORITY*

Zeige XOR $\leq_{AC_0}$ MAJORITY, wobei

$$\mathrm{MAJORITY}(x_1, \ldots, x_N) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i \geq \lceil N/2 \rceil.$$

Hinweis: Nutze ein MAJORITY-Gatter, um die Funktion $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$ zu berechnen.

5.3. Aufgabe (8) *UNDIRECTED-REACHABILITY*

Zeige XOR $\leq_{AC_0}$ UNDIRECTED-REACHABILITY.

Hinweis: Konstruiere zuerst einen Schaltkreis, der bei Eingabe $x_1, \ldots, x_n$ die Adjazenzmatrix des Graphen G mit der Knotenmenge $\{1, v_1, \ldots, v_n, 2\}$ und den folgenden Kanten berechnet:

$$\{1, v_l\} \Leftrightarrow l = \min\{i : x_i = 1\}$$
$$\{v_r, 2\} \Leftrightarrow r = \max\{i : x_i = 1\}$$
$$\{v_i, v_j\} \Leftrightarrow i < j \wedge x_i = x_j = 1 \wedge x_k = 0 \text{ für } i < k < j.$$

Modifiziere G so, dass 2 genau dann von 1 aus erreichbar ist, wenn $\mathrm{XOR}(x) = 1$.