

## Übungsblatt 3

Ausgabe: 06.05.2019

Abgabe: 13.05.2019

### Aufgabe 3.1 SAT-Orakel und alternierende Berechnungen

(4 + 4 = 8 Punkte)

Sei  $\text{NP}^{\text{SAT}}$  die Klasse aller Sprachen, die durch eine nichtdeterministische Turingmaschine mithilfe eines Orakels für das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in Polynomialzeit entschieden werden können. Zeigen Sie:

- $\text{NP}^{\text{SAT}} \subseteq \Sigma_2^p$ .
- $\Sigma_2^p \subseteq \text{NP}^{\text{SAT}}$ .

*Hinweis:* Eine Sprache  $L$  ist genau dann

- in  $\text{NP} = \Sigma_1^p$ , wenn ihr Wortproblem („Ist  $w \in L$ ?“) durch eine Formel der Form  $\varphi(w) = \exists x : \alpha(x, w)$
- in  $\Sigma_2^p$ , wenn ihr Wortproblem durch eine Formel der Form  $\psi(w) = \exists x \forall y : \beta(x, y, w)$

beschrieben werden kann, wobei  $\alpha(x, w)$  bzw.  $\beta(x, y, w)$  deterministisch in polynomieller Zeit berechenbare Prädikate sind.

### Aufgabe 3.2 NC und PSPACE

(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

- Zeigen Sie:  $\text{NC} \subseteq \text{DSPACE}(n)$ .
- Zeigen Sie:  $\text{NC} \subsetneq \text{PSPACE}$ , d. h.  $\text{NC}$  ist eine echte Teilmenge von  $\text{PSPACE}$ .
- Zeigen Sie:  $\text{QBF} \notin \text{NC}$ .

*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass  $\text{QBF}$  (selbst unter Logspace-Reduktionen) vollständig für  $\text{PSPACE}$  ist.

### Aufgabe 3.3 D-REACHABILITY und U-REACHABILITY

(5 + 5 = 10 Punkte)

Gegeben seien die beiden folgenden Sprachen auf Graphen mit der Knotenmenge  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} \text{SZSHG} &:= \{G = (V, E) \mid G \text{ ist ein gerichteter, stark zusammenhängender Graph}\} \\ \text{BIPARTIT} &:= \{G = (V, E) \mid G \text{ ist ein bipartiter Graph}\} \end{aligned}$$

- Zeigen Sie:  $\text{SZSHG}$  ist  $\text{NL}$ -vollständig.
- Zeigen Sie:  $\text{BIPARTIT} \in \text{DL}$ .

*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass  $\text{U-REACHABILITY}$  in  $\text{DL}$  liegt. Ersetzen Sie jeden Knoten  $i$  durch zwei Kopien  $i_{\text{von}}$  und  $i_{\text{nach}}$ . Welche Kanten fügen Sie dem transformierten Graphen hinzu, damit es einen Weg von  $i_{\text{von}}$  nach  $i_{\text{nach}}$  genau dann gibt, wenn  $i$  im Eingabegraphen auf einem Kreis ungerader Länge liegt?