

Übungsblatt 2

Ausgabe: 04.05.2020
Abgabe: 11.05.20 bis 12 Uhr

Die Abgabe erfolgt per E-Mail an [Hannes Seiwert](mailto:seiwert@em.uni-frankfurt.de) (seiwert@em.uni-frankfurt.de).

Aufgabe 2.1 *Alternierende Berechnungen und Speicherplatz* (4 + 4 = 8 Punkte)

Zeigen Sie:

- $AP \subseteq PSPACE$.
- $PSPACE \subseteq AP$.

Hinweis: Eine *quantifizierte Boolesche Formel* hat die Form $\alpha = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wobei $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ gilt und φ eine aussagenlogische Formel über den Variablen x_1, \dots, x_n ist. In der Vorlesung wird später gezeigt, dass die Sprache QBF aller wahren quantifizierten Booleschen Formeln PSPACE-vollständig ist. Es genügt also zu zeigen, dass $QBF \in AP$ gilt.

Aufgabe 2.2 *Deterministische LOGSPACE-Berechnungen* (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme mit logarithmischem Speicher gelöst werden können. Eine informelle Beschreibung der Vorgehensweise ist ausreichend, solange die Idee überzeugend beschrieben wird. Begründen Sie aber sorgfältig, warum nur logarithmischer Speicherplatz benötigt wird.

Sie dürfen annehmen, dass konstant viele Arbeitsbänder mit jeweils eigenem Lese-/Schreibkopf und konstant viele Leseköpfe auf dem Eingabeband zur Verfügung stehen.

- Für ein Wort $u \in \{0, 1\}^*$ sei $\text{Zahl}(u)$ die natürliche Zahl mit Binärdarstellung u , das niedrigstwertige Bit stehe dabei rechts.
 - Zeigen Sie, dass die Addition zweier Binärzahlen auf logarithmischem Platz ausgeführt werden kann: Für Eingabe $x\#y$ (mit $x, y \in \{0, 1\}^*$) ist die Binärdarstellung z der Summe $\text{Zahl}(x) + \text{Zahl}(y)$ auf dem Ausgabeband auszugeben.
 - Zeigen Sie, dass die Multiplikation zweier Binärzahlen auf logarithmischem Platz ausgeführt werden kann: Für Eingabe $x\#y$ (mit $x, y \in \{0, 1\}^*$) ist die Binärdarstellung z des Produkts $\text{Zahl}(x) \cdot \text{Zahl}(y)$ auf dem Ausgabeband auszugeben.

Hinweis: Für $n = |x| + |y|$ dürfen nur $\mathcal{O}(\log_2 n)$ Zellen des Arbeitsbands benutzt werden.

- Sei L die Sprache aller wohlgeformten Klammersausdrücke mit den Klammertypen $(,)$ und $[,]$. D.h. die Sprache L wird erzeugt von der Grammatik $G = (\Sigma, \{S\}, S, P)$ mit dem Alphabet $\Sigma = \{ (,), [,] \}$ und den Produktionen

$$S \rightarrow (S) \mid [S] \mid SS \mid \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass L zur Klasse DL gehört.

Hinweis: Der Fall von zwei Klammertypen ist komplizierter als der eines Klammertyps. Das Beispiel $([])$ zeigt, dass sich die beiden Klammertypen gegenseitig stören können.

Aufgabe 2.3 *Wortproblem für NFAs*

(6 Punkte)

Im Wortproblem für NFAs ist ein NFA A und ein Wort w gegeben. Eine Eingabe (A, w) wird genau dann akzeptiert, falls $w \in L(A)$ gilt.

Zeigen Sie: Das Wortproblem für NFAs ist NL-vollständig.

Hinweis: Reduzieren Sie D-REACHABILITY auf das Wortproblem für NFAs.