Komplexitätstheorie

Sommersemester 2020

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 9

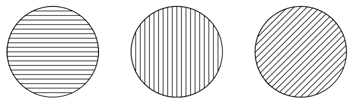
Ausgabe: 22.06.2020
Abgabe: 29.06.2020

Die Abgabe erfolgt per E-Mail an Hannes Seiwert (`seiwert@em.uni-frankfurt.de`).

Aufgabe 9.1 *Polarisationsfilter und projektive Messungen* (1 + 2 + 4 = 7 Punkte)

Wir schicken linear polarisiertes Licht durch verschiedene Polarisationsfilter. Betrachte drei verschiedene Filter F_h, F_v und F_d:

- Der Filter F_h lässt nur *horizontal* polarisiertes Licht durch.
- Der Filter F_v lässt nur *vertikal* polarisiertes Licht durch.
- Der Filter F_d lässt nur *diagonal* (in nordost-südwest-Richtung) polarisiertes Licht durch.



F_h F_v F_d

Die Polarisationsrichtung modellieren wir durch einen 1-Qubit-Zustand über dem Hilbertraum $\mathbb{C}^2$, wobei der Zustand $|0\rangle$ der horizontalen Polarisation und $|1\rangle$ der vertikalen Polarisation entspricht. Die drei Filter lassen sich dann durch Projektionsoperatoren beschreiben:

$$F_h = |0\rangle\langle 0|, \qquad F_v = |1\rangle\langle 1|, \qquad F_d = \tfrac{1}{2}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big)\Big(\langle 0| + \langle 1|\Big)$$

a) Was passiert, wenn Sie die zwei Filter F_h und F_v übereinander legen? Berechnen Sie F_hF_v und dessen Norm $\|F_hF_v\|$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Was passiert, wenn Sie die drei Filter F_h, F_d und F_v übereinander legen? Berechnen Sie $F_hF_dF_v$ und dessen Norm $\|F_hF_dF_v\|$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Nehmen Sie an, dass weitere Filter zur Verfügung stehen. Für einen Winkel $\alpha \in [0, \pi/2]$ sei

$$|\alpha\rangle := \cos(\alpha)\,|0\rangle + \sin(\alpha)\,|1\rangle \quad \text{und} \quad F_\alpha := |\alpha\rangle\langle\alpha|.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ und alle $j = 0, 1, \dots, k$ sei $\alpha_j = \frac{j}{k} \cdot \frac{\pi}{2}$. Was passiert, wenn Sie die $k+1$ Filter F_{α_0}, $F_{\alpha_1}, \dots,$ F_{α_k} übereinander legen? Berechnen Sie $\mathcal{F}_k := \prod_{i=0}^{k} F_{\alpha_i}$ und interpretieren Sie das Ergebnis für den Grenzwert $k \to \infty$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\langle\beta|\gamma\rangle$ für beliebige Winkel $\beta, \gamma \in [0, \pi/2]$. Für kleine x können Sie $\cos(x)$ durch seine Taylorreihe approximieren: $\cos(x) \approx 1 - x^2/2$.

Aufgabe 9.2 *Verschränkte Zustände* (2 + 6 = 8 Punkte)

Wir betrachten das folgende kooperative Spiel: Alice erhält ein zufälliges Bit x, Bob erhält ein zufälliges Bit y. Alice verkündet $a = a(x)$, Bob verkündet $b = b(y)$. Die beiden gewinnen genau dann, wenn $a \oplus b = x \wedge y$ gilt.

a) Zeigen Sie: Jede deterministische Strategie hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von höchstens $3/4$.

Kommentar: Daraus folgt, dass auch jede randomisierte Strategie eine Gewinnwahrscheinlichkeit von höchstens $3/4$ besitzt. (Warum?)

Wir wenden uns nun der Quanten-Version des Spiels zu. Alice und Bob tauschen vor dem Spiel den EPR-Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big)$ aus, Alice bekommt das erste Qubit, Bob das zweite Qubit. Nach Erhalten x und y gehen sie wie folgt vor:

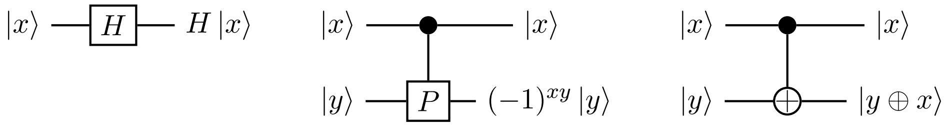
- Wenn $x = 1$, dann dreht Alice das erste Qubit um 22,5° nach links.[1]
- Wenn $y = 1$, dann dreht Bob das zweite Qubit um 22,5° nach rechts.[2]
- Beide messen jeweils ihr Qubit (in der Standardbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) und antworten mit dem Messergebnis. (Es spielt keine Rolle, welcher der beiden zuerst misst.)

b) Zeigen Sie: Die Gewinnwahrscheinlichkeit in dem obigen Verfahren beträgt mindestens 4/5.

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $x + y = 0,\ x + y = 1,\ x + y = 2$ und berechnen Sie jeweils die erwarteten Messergebnisse von Alice und Bob.

Aufgabe 9.3 *Quantenschaltkreise* (2 + 2 + 3 + 3 = 9 Punkte)

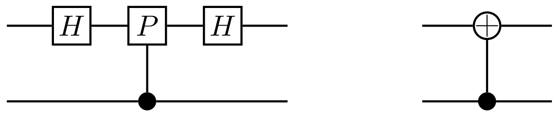
Benutzen Sie die folgenden graphischen Darstellungen der drei wichtigen Gattertypen: Hadamard, Controlled-Phasenflip (CPHASE) und Controlled-Not (CNOT). Es seien $x, y \in \{0, 1\}$.



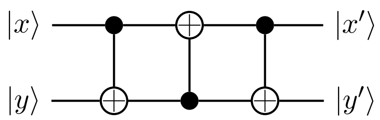
Hadamard-Gatter CPHASE-Gatter CNOT-Gatter

Beachten Sie, dass es sich bei CPHASE (bzw. CNOT) um ein Controlled-U-Gatter handelt, wobei hier U das Phasenflipgatter (bzw. das Bitflipgatter) ist.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Quantenschaltkreise dieselbe Funktion berechnen.



b) Betrachten Sie den folgenden Quantenschaltkreis. Welche Funktion berechnet er?



c) Konstruieren Sie einen Quantenschaltkreis, der aus $|00\rangle$ den EPR-Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big)$ erzeugt. Benutzen Sie dabei nur die Gattertypen, die in der Vorlesung behandelt wurden.

d) Sei $b = b_1 \dots b_n \in \{0, 1\}^n$ und $|b\rangle \in \mathbb{C}^{2^n}$ ein n-Qubit-Zustand. Bestimmen Sie

$$H^{\otimes n} |b\rangle \ ,$$

wobei $H^{\otimes n}$ das n-Qubit-Hadamard-Gatter ist. Stellen Sie das Ergebnis in der Standardbasis $\{\,|a\rangle : a \in \{0, 1\}^n\}$ dar.

Hinweis: Es gilt $H^{\otimes n} |b\rangle = H |b_1\rangle \otimes \cdots \otimes H |b_n\rangle$.

[1] Das heißt, sie wendet den Operator $A = (R_{\pi/8} \otimes \mathrm{Id})$ an, wobei R_α der Rotationsoperator um den Winkel α mit $R_\alpha|0\rangle = |\alpha\rangle$ (vgl. Aufgabe 9.1 c) und $R_\alpha|1\rangle = |\pi/2 + \alpha\rangle$ und Id der Identitätsoperator ist.

[2] Das heißt, er wendet den Operator $B = (\mathrm{Id} \otimes R_{-\pi/8})$ an.