Komplexitätstheorie

Sommersemester 2020

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 11

Ausgabe: 06.07.2020
Abgabe: 13.07.2020

Die Abgabe erfolgt per E-Mail an Hannes Seiwert (`seiwert@em.uni-frankfurt.de`).

Aufgabe 11.1 *Schnapp sie dir alle!* (2 + 5 = 7 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ mit $|f^{-1}(1)| = \ell \geq 1$, d. h. es gebe ℓ „Treffer“. Die Funktion f werde über den unitären Operator O_f mit $O_f\,|x\rangle = (-1)^{f(x)}\,|x\rangle$ für $x \in \{0,1\}^n$ implementiert. Sei $N = 2^n$.

Mithilfe von Grovers Algorithmus können wir *einen* Treffer mit $O(\sqrt{N/\ell})$ Aufrufen des Operators O_f finden. Jetzt wollen wir *alle* Treffer finden. Wir nehmen an, dass ℓ bekannt ist, und wollen die Anzahl der Aufrufe des Operators O_f möglichst gering halten.

a) Zeigen Sie, dass $O(\sqrt{\ell N}\log \ell)$ Aufrufe genügen.

   Hinweis: Coupon-Collector's-Problem.

b) Zeigen Sie, dass $O(\sqrt{\ell N})$ Aufrufe genügen.

Aufgabe 11.2 *Quanten-Fouriertransformation auf Qudits* (3 + 2 + 2 + 4 = 11 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $D := \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Ein *Qudit* ist ein Zustand $|x\rangle \in \mathbb{C}^d$, der ein d-dimensionales System mit Standardbasis $\{|y\rangle : y \in D\}$ beschreibt.

Die Quanten-Fouriertransformation QFT_d ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{QFT}_d\,|x\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{y \in D} e^{2\pi i x y/d}\,|y\rangle \quad \text{für } x \in D\,.$$

a) Bestimmen Sie QFT_d für $d = 2, 3, 4$ explizit in Matrixdarstellung.

b) Zeigen Sie, dass QFT_d für beliebiges d unitär ist.

c) Für welche Werte von d ist QFT_d selbstinvers, d. h. es gilt $\mathrm{QFT}_d^2 = \mathrm{Id}$?

d) Es gelte $d = pq$ für $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei $|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} |jp\rangle$. Bestimmen Sie $\mathrm{QFT}_d\,|\psi\rangle$.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3 *„Real-World"-Quantencomuting* (6 Punkte)

Die *Reelle Quantenmechanik* ist identisch zur Standard-Quantenmechanik, außer dass hier Amplituden stets *reellwertig* sind und Operatoren nicht unitär sondern *orthogonal* sein müssen.

Zeigen Sie, dass ein Standard-Quantenschaltkreis auf n Qubits durch einen reellen Quantenschaltkreis auf $n+1$ Qubits effizient simuliert werden kann. Die Anzahl der Gatter beider Schaltkreise soll gleich sein, während sich die Anzahl der Qubits, auf denen ein Gatter agiert, leicht unterscheiden darf. Zeigen Sie insbesondere, wie die Simulation eines Phasengatters aussieht.

Hinweis: Ein Zustand mit n Qubits besitzt 2^n Amplituden, ein Zustand mit $n+1$ Qubits doppelt so viele!